Problemas de la 7ª semana

2º ESO

1º-) Si el producto $200 \cdot 201 \cdot 202 \cdot 203 \cdot 204 \cdot 205 \cdot 206 \cdot 207 \cdot 208 \cdot 209 \cdot 210$ se escribe como $2^n \cdot m$, donde m es impar, ¿cuál es el valor de n?

Solución: De los 11 números del producto, 6 son divisibles por 2, 3 son divisibles por 4 (que también es potencia de 2), 2 son divisibles por 8 y 1 es divisible por 16.
Luego n = 6+3+2+1 = 12.
Otra forma de hacerlo es descomponer cada número del producto en factores primos y poner el producto de la forma $2^n \cdot m$ y se ve que n = 12.

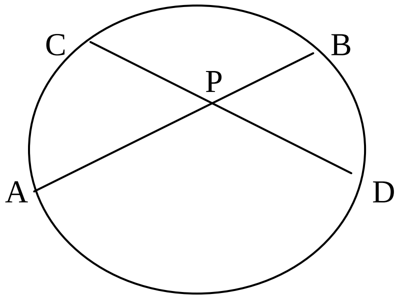
2º-) Consideremos la suma

$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\,C\ D \\ \hline E\ F\ G \end{array}$$

La letra F = 0 y las otras letras representan los dígitos 1,2,3,4,5 o 6 que se usan una sola vez. Calcular el número AB sabiendo que es primo.

Solución: $$\begin{array}{r} 4\ \ 3 \\ 6\ \ 2 \\ \hline 1\ \ 0\ \ 5 \end{array}$$ El número es 43.

3º-) Los arcos AC y BD miden 95º y 80º, ¿cuántos grados tiene el ángulo APC?.

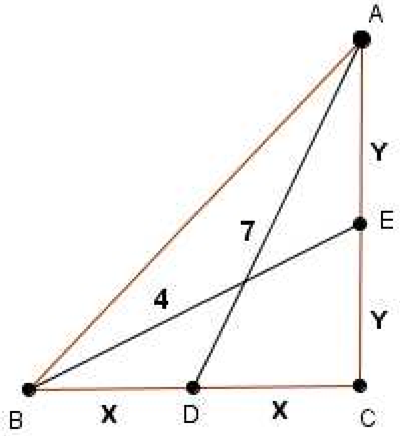


Solución: El ángulo APC es interior, luego mide $\frac{AC+BD}{2} = \frac{95º+80º}{2} = \frac{175º}{2} = 87{,}5º$

4º ESO

1º-) Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Los puntos medios de BC y AC son D y E. Si AD = 7 y BE = 4, calcular AB.

Solución:



Aplicamos Pitágoras $\left.\begin{cases}(2y)^2+x^2=49\\ y^2+(2x)^2=16\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{Re}\,solviendo \Rightarrow x=1\rightarrow y=\sqrt{12}$

$$AB^2=(2x)^2+(2y)^2=4+48=52 \quad \Rightarrow\ AB=\sqrt{52}=2\cdot\sqrt{13}$$

2º-) La suma de los términos 1º y 4º de una progresión geométrica es 18 y la suma de los términos 2º y 3º es 12. Calcula la diferencia entre los términos 3º y 2º de la progresión.

Solución:

$$\left.\begin{cases}a_1+a_4=18\\ a_2+a_3=12\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}a_1+a_1r^3=18\\ a_1r+a_1r^2=12\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}a_1\left(1+r^3\right)=18\\ a_1\left(r+r^2\right)=12\end{cases}\right\}\Rightarrow\frac{1+r^3}{r+r^2}=\frac{18}{12}$$

Haciendo operaciones queda $2r^3-3r^2-3r+2=0$ → Resolviendo por Ruffini →

$$r=2 \quad ,r=\frac{1}{2}\ \rightarrow\left\{\begin{matrix}r=2\Rightarrow a_1=2\rightarrow a_2=4\rightarrow a_3=8\rightarrow a_3-a_2=4\\ r=\frac{1}{2}\Rightarrow a_1=16\rightarrow a_2=8\rightarrow a_3=4\rightarrow a_3-a_2=-4\end{matrix}\right\}$$

3º-) Resolver la ecuación $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) + 6 = 0$

Solución: Hacemos el cambio:

$x^2+2x=y\rightarrow la\ ecuación\ queda\rightarrow y^2-7y+6=0\ \rightarrow$

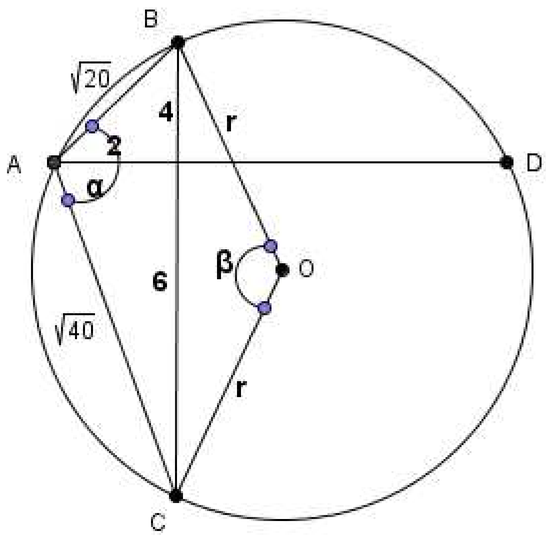
Resolviendo → $y=6$ → $y=1$ → Sustituyendo en el cambio →

$x^2+2x=6\quad Resolviendo\ \rightarrow\ x_1=-1+\sqrt{7}\rightarrow x_2=-1-\sqrt{7}$

$x^2+2x=1\quad Resolviendo\ \rightarrow\ x_3=-1+\sqrt{2}\rightarrow x_4=-1-\sqrt{2}$

Bachillerato

1º-) Calcular el radio de la circunferencia de la figura



Solución: Los segmentos $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \rightarrow AC = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$
Aplicamos el teorema del coseno al triángulo ABC

$$10^2 = \sqrt{20^2} + \sqrt{40^2} - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{40} \cdot \cos\alpha$$

$\cos\alpha = \dfrac{-40}{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{8}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135º \rightarrow$ El arco BDC es 270º y el otro arco BAC es 90º, luego $\beta = 90º \rightarrow$ El triángulo OBC es rectángulo isósceles $\rightarrow$ $r^2 + r^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 50 \Rightarrow r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

2º-) Escribe la progresión aritmética que cumple:

a) La suma de todos sus términos, excepto el primero, es -36.
b) La suma de todos sus términos, excepto el último, es cero.
c) La diferencia entre los términos 10º y 6º es -16.

Solución:
$$\begin{cases} a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n = -36 \\ a_1 + a_2 + \dots\dots\dots + a_{n-1} = 0 \\ a_{10} - a_6 = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -36 = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n - a_1 \\ \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n - a_n = 0 \\ a_1 + 9d - a_1 - 5d = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4d = -16 \\ d = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -72 = (a_1 + a_n) \cdot n - 2 \cdot a_1 \\ (a_1 + a_n) \cdot n = 2 \cdot a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -72 = 2 \cdot a_n - 2 \cdot a_1 \Rightarrow -36 = a_n - a_1 \\ -36 = a_1 + (n-1) \cdot (-4) - a_1 \Rightarrow n = 10 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases}(a_1 + a_n)\cdot 10 = 2\cdot a_n \\ a_n = a_1 - 36\end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Re}\,solviendo \Rightarrow a_1 = 16$$

La progresión es: 16, 12, 8, 4, 0, -4, -8, -12, -16, -20

3º-) Resolver la ecuación $x^2 + \dfrac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

<u>Solución:</u>

$$x^2 + \left(\frac{5x}{x-5}\right)^2 = 11 \Rightarrow \left(x + \frac{5x}{x-5}\right)^2 - \frac{10x^2}{x-5} = 11 \Rightarrow \left(\frac{x^2 - 5x + 5x}{x-5}\right)^2 - \frac{10x^2}{x-5} = 11$$

$$\left(\frac{x^2}{x-5}\right)^2 - \frac{10x^2}{x-5} - 11 = 0 \Rightarrow Hacemos\ \frac{x^2}{x-5} = y \Rightarrow y^2 - 10y - 11 = 0 \Rightarrow y = 11;\ y = -1$$

$$\frac{x^2}{x-5} = 11 \Rightarrow x^2 - 11x + 55 = 0 \Rightarrow No \text{ tiene solución real.}$$

$$\frac{x^2}{x-5} = -1 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\quad ;\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$$