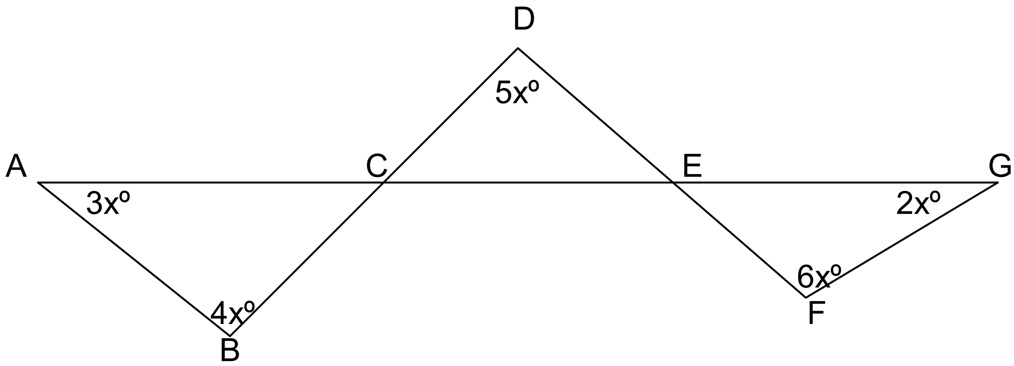
Problemas de la 5ª semana

2º ESO

1º-) Calcular xº en la figura



Solución: En el triángulo ABC → C = 180º - 7xº
En el triángulo CDE → E = 180º - (180º - 7xº) -5xº = 2xº
En el triángulo EFG → 2xº + 2xº + 6xº = 180º → xº = 18º

2º-) Si $\frac{a}{b} = 2$, calcula $\frac{4 \cdot a \cdot b}{16 \cdot a^2 + b^2}$

Solución: $\frac{4ab}{16a^2 + b^2} = \frac{\frac{4ab}{b^2}}{\frac{16a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}{16\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = \frac{4 \cdot 2}{16 \cdot 4 + 1} = \frac{8}{65}$

3º-) Encuentra la suma de los dígitos del número 10^{2003} - 10^{1003}

Solución:
$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{2003} - 10^{1003} = 10^{1003}\left(10^{1000} - 1\right) = 10^{1003} \cdot \underbrace{9999\ldots\ldots..9}_{mil\ \text{nueves}} = \\ \underbrace{999\ldots\ldots..9}_{mil\ \text{nueves}}\underbrace{0000\ldots\ldots..0}_{mil\ \text{tres ceros}} \end{array} \right\}$$

Las cifras suman 9.000

4º ESO

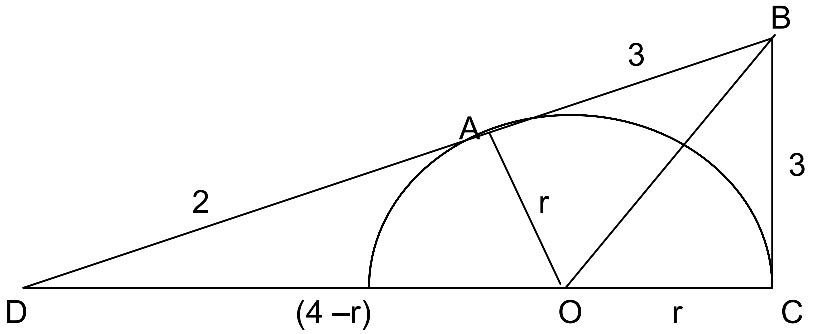
1º-) Calcular el valor de $\sqrt{11 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$

Solución:

$$Sea\ \ N = \sqrt{11 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{10}} \Rightarrow \text{elevemos al cuadrado } \mathrm{N}^2 = \left(\sqrt{11 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{10}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$N^2 = 11 + 2\sqrt{10} + 11 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{121 - 40} \Rightarrow N^2 = 22 + 2\sqrt{81} = 22 + 18 = 40 \Rightarrow N = \sqrt{40}$$

2º-) Calcular el radio del semicírculo



Solución: Los triángulos OAB y OBC son iguales: tienen un cateto igual a r y la hipotenusa común, luego AB = BC = 3 → DA = 2 y DO = 4 –r. Aplicando Pitágoras al triángulo OAD → $(4 - r)^2 = 2^2 + r^2$ → resolviendo → → r = 1,5

3º-) Sea la sucesión definida por $a_1 = 4$; $a_{n+1} = a_n + 4n$.
Calcular a_{1000}.

Solución:
$a_1 = 4$
$a_2 = a_1 + 4 = 4 + 4 = 8$
$a_3 = a_2 + 8 = 4 + 4 + 4 \cdot 2$
$a_4 = a_3 + 12 = 4 + 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3$
$a_5 = a_4 + 16 = 4 + 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4$
.
.
.
$a_{1000} = 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4 \cdot 999$
$a_{1000} = 4 + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 999) =$

$$= 4 + 4 \cdot \left(\frac{1+999}{2}\right) \cdot 999 = 4 + 4 \cdot 500 \cdot 999 = 1.998.004$$

Bachillerato

1º-) Calcular el menor número natural que dividido por 5, 6 y 7 da sucesivamente por restos 4, 5 y 6.

Solución: Sea N el número, entonces verifica:

$$\begin{Bmatrix} N = 5a + 4 \\ N = 6b + 5 \\ N = 7c + 6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N - 4 = 5a \\ N - 5 = 6b \\ N - 6 = 7c \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N - 4 = \dot{5} \\ N - 4 = \dot{6} + 1 \\ N - 4 = \dot{7} + 2 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{5} = 5 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow 30 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 205$$

$$\dot{6} + 1 = 7 \rightarrow 13 \rightarrow 19 \rightarrow 25 \rightarrow 31 \rightarrow 37 \rightarrow 43 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 205$$

$$\dot{7} + 2 = 9 \rightarrow 16 \rightarrow 23 \rightarrow 30 \rightarrow 37 \rightarrow 44 \rightarrow 51 \rightarrow 58 \rightarrow 65 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 205$$

Luego N – 4 = 205 → N = 209

2º-) Resolver en Z la ecuación $(x^2 + y)\cdot(x + y^2) = (x + y)^3$

<u>Solución:</u> Desarrollamos la ecuación

$$x^3 + x^2y^2 + xy + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^2y^2 + xy - 3x^2y - 3xy^2 = 0$$

$$xy\cdot(xy + 1 - 3x - 3y) = 0$$

$$Si\ \ x = 0 \Rightarrow y = Z \Rightarrow (0,k) \to k = Z$$

$$Si\ \ y = 0 \Rightarrow x = Z \Rightarrow (k,0) \to k = Z$$

$$Si\ \ x \neq 0; y \neq 0 \Rightarrow xy + 1 - 3x - 3y = 0$$

$$y(x-3) = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{x-3} = 3 + \frac{8}{x-3}$$

$Si\ \ x = 1 \to y = -1$ $Si\ \ x = 2 \to y = -5$ $Si\ \ x = 4 \to y = 11$ $Si\ \ x = 5 \to y = 7$

$Si\ \ x = 7 \to y = 5$ $Si\ \ x = 11 \to y = 4$ $Si\ \ x = -1 \to y = 1$ $Si\ \ x = -5 \to y = 2$

3º-) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 15 cm y 20 cm. Determina la distancia del centro del círculo inscrito a la altura correspondiente a la hipotenusa.

<u>Solución:</u> Calculamos la hipotenusa $CD = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$

La figura OMEH es un cuadrado de lado r → CM = 15 – r → HD = 20 - r

Llamamos CF = x ; FD = 25 – x → $EF^2 = 15^2 - x^2 = 20^2 - (25-x)^2$

Operando x = 9.

Los triángulos OCM y OCG son rectángulos e iguales → CG = 15 – r

Los triángulos OHD y OGD son rectángulos e iguales → GD = 20 – r

Luego CG + GD = 25 → 15 – r + 20 – r = 25 → r = 5

CG = 15 – 5 = 10 → CF = 9 → distancia = CG – CF = 1