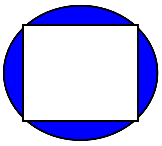
Problemas de la 3ª semana

2º ESO

1º-) Un cuadrado de lado 1 cm está inscrito en un círculo. Calcular el área de la región sombreada.



Solución: Calculamos la diagonal del cuadrado, que es el diámetro del círculo: diagonal = diámetro = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, el radio del círculo es r = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Área del círculo = $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$

Área del cuadrado = lado^2 = 1^2 = 1

Área sombreada = Área Círculo - Área Cuadrado = $\frac{\pi}{2} - 1\ cm^2$

2º-) Calcular : $\frac{2^{204}-2^{201}}{2^{203}-2^{200}}$

Solución: Sacamos factor común en el numerador y en el denominador y simplificamos

$$\frac{2^{201}\left(2^3-1\right)}{2^{200}\left(2^3-1\right)} = \frac{2^{201}\cdot 7}{2^{200}\cdot 7} = \frac{2^{201}}{2^{200}} = 2$$

3º-) Sean los números $2^{1.000}$; 3^{600} y 10^{300} . Ordenarlos en orden creciente.

Solución: Ponemos las potencias dadas como potencias de potencias

$$2^{1000} = \left(2^{10}\right)^{100} = (1024)^{100}$$

$$3^{600} = \left(3^{6}\right)^{100} = (729)^{100}$$

$$10^{300} = \left(10^{3}\right)^{100} = (1000)^{100}$$ por tanto

$(729)^{100} < (1000)^{100} < (1024)^{100} \quad \Rightarrow \quad 3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$

4º ESO

1º-) Encuentra la suma de todos los números naturales de tres dígitos, que al dividirlos por 5 den de resto 4.

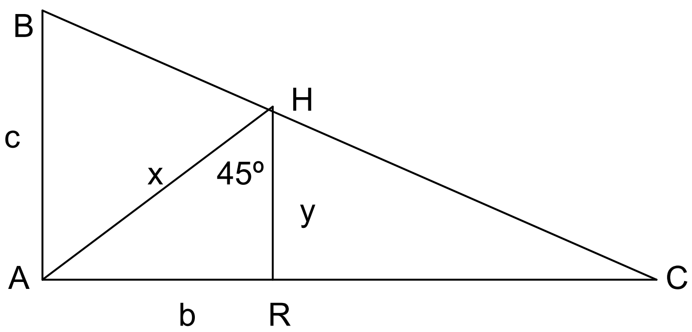
Solución: El primer número de tres dígitos que al dividirlo por 5 da de resto 4 es 104 y el último 999. Estos números forman una progresión aritmética de diferencia 5. Calculamos cuantos números hay y los sumamos

$a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d \Rightarrow 999 = 104 + (n - 1)\cdot 5 \Rightarrow n = 180$

$$S = \frac{104 + 999}{2}\cdot 180 = 99.270$$

2º-) Los catetos de un triángulo rectángulo son b y c. Encuentra la longitud de la bisectriz del ángulo recto.

Solución:



Sea el triángulo rectángulo ABC. La bisectriz AH del ángulo recto A mide x. Dibujamos la recta HR. El triángulo AHR es rectángulo isósceles. AB = c ; AC = b ; AH = x ; HR = y ; AR = y ; RC = b - y

Los triángulos ABC y HRC son semejantes, luego $\Rightarrow \frac{c}{y} = \frac{b}{b-y} \Rightarrow$ multiplicando en cruz $\Rightarrow$ by = cb – cy $\Rightarrow$ by + cy = cb $\Rightarrow$ $y(b+c) = cb \Rightarrow y = \frac{bc}{b+c}$

Aplicando Pitágoras al triángulo AHR $\Rightarrow x^2 = y^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = 2\cdot y^2 = 2\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}$

$\Rightarrow x = \frac{bc}{b+c}\sqrt{2}$

Bachillerato

1º-) Resolver la ecuación: $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\left(\log_3 x\right)^2=1$

Solución: Aplicamos las propiedades de los logaritmos para resolverla

$$\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\left(\log_3 x\right)^2=1 \Rightarrow \log_{3x}3-\log_{3x}x+\left(\log_3 x\right)^2=1 \Rightarrow \frac{1}{\log_3 3x}-\log_{3x}x+\left(\log_3 x\right)^2=1$$

$$\frac{1}{1+\log_3 x}-\log_{3x}x+\left(\log_3 x\right)^2=1 \Rightarrow \frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\log_x 3x}+\left(\log_3 x\right)^2=1$$

$$\frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\log_x 3+1}+\left(\log_3 x\right)^2=1 \Rightarrow \frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\frac{1}{\log_3 x}+1}+\left(\log_3 x\right)^2=1$$

Hacemos el cambio $\log_3 x=y \Rightarrow \frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+\frac{1}{y}}+y^2=1 \Rightarrow \frac{1}{1+y}-\frac{y}{1+y}+y^2=1$

Realizando operaciones llegamos a la ecuación $y^3+y^2-2y=0$

Resolviéndola nos da y = 0 ; y = 1 ; y = -2. Sustituyendo en el cambio

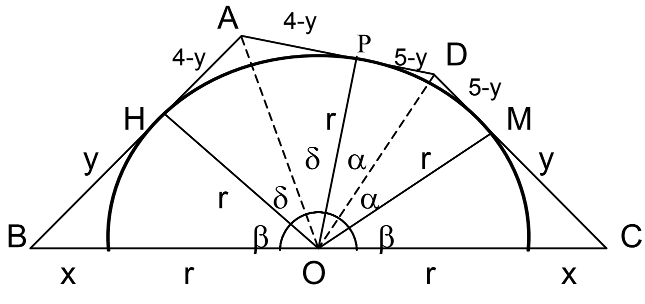
$\log_3 x=0 \Rightarrow x=1$

$\log_3 x=1 \Rightarrow x=3$

$\log_3 x=-2 \Rightarrow x=3^{-2}=\frac{1}{9}$

2º-) Un semicírculo está inscrito en un cuadrilátero ABCD. El punto medio de BC coincide con el centro del semicírculo, y el diámetro del semicírculo descansa sobre una parte de BC. Si AB = 4 y CD = 5, ¿cuánto vale BC?.

Solución:



Los triángulos OHB ; OHA ; OPA ; OPD ; OMD y OMC son rectángulos. Los triángulos OHA y OPA son iguales puesto que tienen la hipotenusa común y un cateto igual. Lo mismo sucede con los triángulos OPD y OMD. Los lados de los triángulos son los expresados en la figura.

Aplicando Pitágoras al triángulo OMC

$r^2+y^2=(r+x)^2 \Rightarrow (r+x)=\sqrt{r^2+y^2}$

$BC = 2(r + x) = 2\sqrt{r^2 + y^2}$

Se verifica que $2\alpha + 2\beta + 2\delta = 180º \Rightarrow \alpha + \beta + \delta = 90º \Rightarrow \alpha + \beta = 90º - \delta$

$tag(\alpha + \beta) = tag(90º - \delta) = \cot g\delta$

$$\frac{tag\alpha + tag\beta}{1 - tag\alpha \cdot tag\beta} = \cot g\delta \Rightarrow \frac{\frac{5-y}{r} + \frac{y}{r}}{1 - \frac{y \cdot (5-y)}{2}} = \frac{r}{4-y}$$

Realizando operaciones llegamos $r^2 + y^2 = 20$

$BC = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$