

Problemas de la 21ª semana

2º ESO

1º-) ¿Cuál es la suma de todos los números primos mayores de 20 y menores de 40?

Solución:

$$23 + 29 + 31 + 37 = 120$$

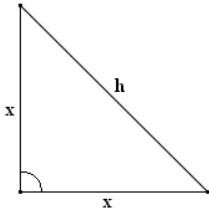
2º-) Resolver la ecuación: $2^{x-1} = 8^x$

Solución:

$$2^{x-1} = (2^3)^x \rightarrow 2^{x-1} = 2^{3x} \rightarrow x-1 = 3x \rightarrow -1 = 2x \rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

3º-) El área de un triángulo rectángulo isósceles es 4cm^2 , calcular la hipotenusa.

Solución:



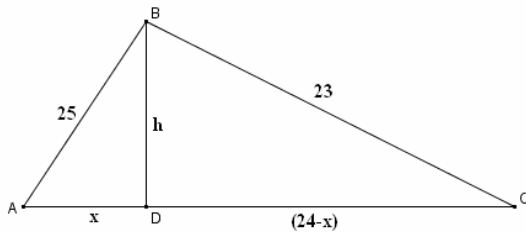
$$A = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = 4 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow$$

$$h = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

4º ESO

1º-) En un triángulo ABC, $AB = 25$, $BC = 23$ y $AC = 24$. Se dibuja una perpendicular por B al lado AC que corta a este en D. Calcular $AD - DC$.

Solución:



$$h^2 = 25^2 - x^2 = 23^2 - (24 - x)^2 \rightarrow$$

$$625 - x^2 = 529 - 576 + 48x - x^2$$

$$625 - 529 + 576 = 48x \rightarrow$$

$$\rightarrow 672 = 48x \rightarrow x = 14 \rightarrow$$

$$AD = 14 \rightarrow CD = 10 \rightarrow AD - DC = 4$$

2º-) Resolver la ecuación: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x + \sqrt{x}} = 1$

Solución:

$$\frac{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})} = 1 \rightarrow x + 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(x + \sqrt{x}) \rightarrow x + 2\sqrt{x} = x\sqrt{x} + x \rightarrow 2\sqrt{x} = x\sqrt{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x}(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow NO \rightarrow x = 2$$

3º-) Calcular k para que la ecuación: $kx^2 + 4kx + 4 = 0$ tenga una solución. Hallar la solución para el k calculado.

Solución:

Resolvemos la ecuación: $\rightarrow x = \frac{-4k \pm \sqrt{16k^2 - 16k}}{2k} \rightarrow$ Si hay una solución:

$$16k^2 - 16k = 0 \rightarrow k^2 - k = 0 \rightarrow k(k - 1) = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow NO \rightarrow k = 1 \rightarrow$$

$$Si k = 1 \rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

Bachillerato

1º-) Calcula la suma de las soluciones de la ecuación: $\sqrt[4]{x + 27} + \sqrt[4]{55 - x} = 4$

Solución:

$$\sqrt[4]{55 - x} = 4 - \sqrt[4]{x + 27} \rightarrow \sqrt[4]{x + 27} = y \rightarrow x + 27 = y^4 \rightarrow x = y^4 - 27$$

$$\sqrt[4]{55 - (y^4 - 27)} = 4 - \sqrt[4]{x + 27}$$

$$\sqrt[4]{82 - y^4} = 4 - \sqrt[4]{x + 27} \rightarrow \text{elevamos a la } 4^a$$

$$82 - y^4 = 256 - 256y + 96y^2 - 16y^3 + y^4$$

$$y^4 - 8y^3 + 48y^2 - 128y + 87 = 0$$

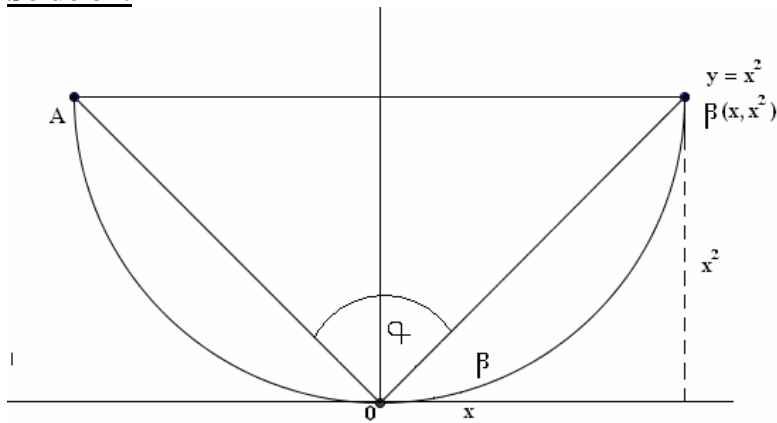
1	-8	48	-128	87
1	1	-7	41	-87
1	-7	41	-87	0
3	3	-12	87	
1	-4	29	0	

$$y^2 - 4y + 29 = 0 \rightarrow y = 2 + 5i \rightarrow y = 2 - 5i$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sqrt[4]{x+27} = 1 &\rightarrow x = -26 \\
 \sqrt[4]{x+27} = 3 &\rightarrow x = 54 \\
 \sqrt[4]{x+27} = 2+5i &\rightarrow x = (2+5i)^4 = 41-840i \\
 \sqrt[4]{x+27} = (2-5i) &\rightarrow x = (2-5i)^4 = 41+840i
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \text{Suma} = \\
 = -26 + 54 + 41 - 840i + 41 + 840i = \\
 = 110
 \end{aligned}$$

2º-) Un triángulo isósceles AOB está inscrito en la parábola $y = x^2$. El vértice O está en el origen y la base AB es paralela al eje de abscisas. Si $\text{tag}(A\hat{O}B) = \frac{3}{4}$, calcula la ordenada del punto B.

Solución:



$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\beta = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{tg } \beta = \text{tg} \left(90 - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{x^2}{x} = x$$

$$x = \text{tg} \left(90 - \frac{\alpha}{2} \right) = \cot g \frac{\alpha}{2}$$

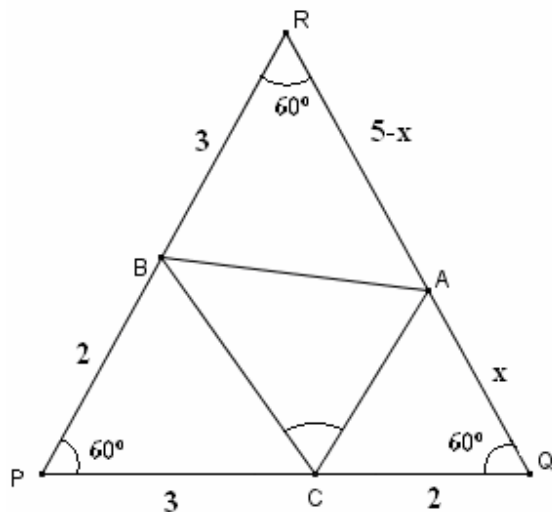
$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - 4/5}{1 + 4/5}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \rightarrow \cot g \frac{\alpha}{2} = 3$$

$$x = \cot g \frac{\alpha}{2} = 3 \rightarrow y = x^2 = 9$$

3°-) Un triángulo rectángulo ABC (AB es la hipotenusa) está inscrito en un triángulo equilátero PQR. Si PC = 3 y BP = CQ = 2, calcular AQ.

Solución:



$$BC^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \cos 60^\circ = 13 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

$$AC^2 = 4 + x^2 - 4x \cos 60^\circ = 4 + x^2 - 2x$$

$$AB^2 = 9 + (5-x)^2 - 6(5-x) \cos 60^\circ =$$

$$= 9 + (5-x)^2 - 3(5-x) =$$

$$= 9 + 25 + x^2 - 10x - 15 + 3x =$$

$$= 19 + x^2 - 7x$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$19 + x^2 - 7x = 7 + 4 + x^2 - 2x$$

$$19 - 7 - 4 = 7x - 2x$$

$$8 = 5x \rightarrow x = \frac{8}{5} = 1,6$$