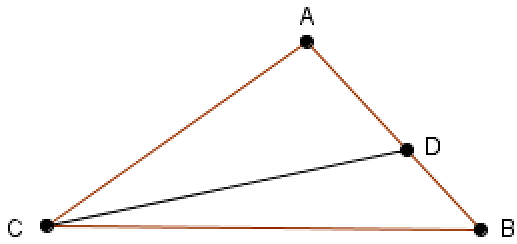
Problemas de la 12ª semana

2º ESO

1º-) En la figura AC = CD = DB y el ángulo B = 23º. Calcular el ángulo A.



Solución:
El triángulo CDB es isósceles → ángulo DCB = ángulo B = 23º →
→ ángulo CDB = 180º - 46º = 134º → ángulo CDA = 180º - 134º = 46º →
→ el triángulo ACD es isósceles → ángulo CDA = ángulo A = 46º

2º-) Si K es dividido por 7 el resto es 3. Si M es dividido por 7 el resto es 4. ¿Cuál es el resto cuando K + M es dividido por 7?

Solución:
Si K es dividido por 7 el resto es 3 → K = 7·a + 3 ; a ϵ Z
Si M es dividido por 7 el resto es 4 → M = 7·b + 4 ; b ϵ Z
Sumando m.a.m → K + M = 7·a + 7·b + 7→ K + M = 7·(a + b + 1) + 0→ luego, Resto = 0

3º-) El denominador de una fracción es 8 unidades mayor que el doble del numerador. Si se añade 12 al numerador, la fracción resultante excede a la fracción primitiva en $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la fracción?

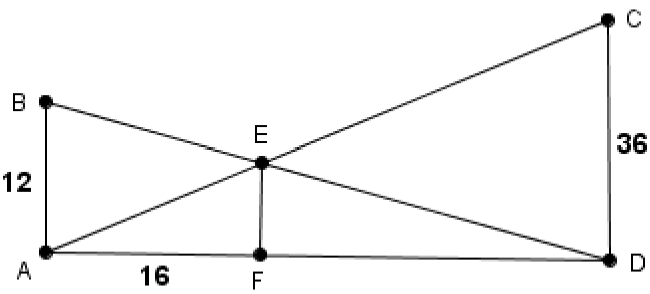
Solución:

$$La\ fracción\ es\ \frac{x}{2x+8} \rightarrow \frac{x+12}{2x+8} = \frac{x}{2x+8} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{x+12}{2x+8} = \frac{4x+2x+8}{4(2x+8)} \rightarrow 4x+48 = 4x+2x+8 \rightarrow x = 20 \rightarrow la\ \ fracción\ es \rightarrow \frac{20}{48}$$

4º ESO

1º-) Calcular EF en la figura.



Solución:

Los triángulos AFE y ADC son semejantes $\rightarrow \dfrac{16}{16+FD}=\dfrac{EF}{36}$

Los triángulos EFD y ABD son semejantes $\rightarrow \dfrac{FD}{16+FD}=\dfrac{EF}{12}$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores $\rightarrow$ EF = 9

2º-) Encontrar la suma de las soluciones positivas de la ecuación

$$x\cdot\sqrt[3]{x}=\frac{x^x}{x}$$

Solución:

$x\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{x-1}\rightarrow x^{\frac{4}{3}}=x^{x-1}\rightarrow x_1=1$

$\frac{4}{3}=x-1\rightarrow x_2=\frac{7}{3}$

$x_1+x_2=\frac{10}{3}$

3º-) Dividiendo 633, 415 y 748 por d $\in$ N se obtienen los siguientes restos 3, 1 y 4. Calcular d.

Solución:

$$\left\{\begin{matrix}633=a\cdot d+3\\415=b\cdot d+1\\748=c\cdot d+4\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}630=a\cdot d\\414=b\cdot d\\744=c\cdot d\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7\\414=2\cdot3^2\cdot23\\744=2^3\cdot3\cdot31\end{matrix}\right\}m.c.d=2\cdot3=6\rightarrow d=6$$

Bachillerato

1º-) Resolver la ecuación $4^{x+\frac{3}{2}}+9^x=6^{x+1}$

Solución:

$$4^x\cdot4^{\frac{3}{2}}+9^x=6^x\cdot6\xrightarrow{:6^x}\left(\frac{4}{6}\right)^x\cdot4^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{9}{6}\right)^x=6\rightarrow8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=6$$

$$\rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=y\rightarrow8y+\frac{1}{y}=6\rightarrow8y^2-6y+1=0\rightarrow resolviendo\rightarrow y_1=\frac{1}{2}\rightarrow y_2=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{1}{2}\rightarrow x\cdot\log_2\frac{2}{3}=\log_2\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{1}{\log_2 3-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{1}{4}\rightarrow x\cdot\log_2\frac{2}{3}=\log_2\frac{1}{4}\rightarrow x=\frac{2}{\log_2 3-1}$$

2º-) Considera la sucesión 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ………., donde el número n aparece n veces. Calcula el término 1992 de la sucesión.

Solución:

1 → 1
3 → 1+2 → en el término 3º hay un 2
6 → 1+2+3 → en el término 6º hay un 3
10 → 1+2+3+4 → en el término 10º hay un 4
15 → 1+2+3+4+5 → en el término 15º hay un 5

Luego, $\frac{1+n}{2}\cdot n = 1992 \rightarrow n^2 + n - 3984 = 0 \rightarrow n \cong 63$

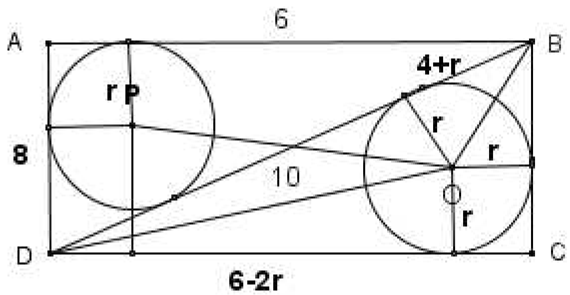
$1+2+3+4+.............+63 = \frac{1+63}{2}\cdot 63 = 2016$

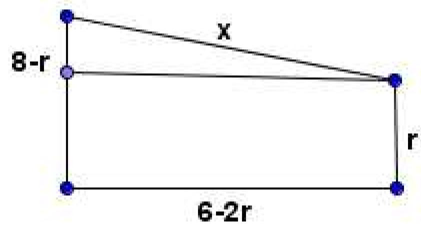
$1+2+3+4+................+62 = \frac{1+62}{2}\cdot 62 = 1953$

En el lugar 1953 está el número 62 y en el lugar 2016 está el número 63; luego en el lugar 1992 está el número 63.

3º-) En el rectángulo ABCD, AB = 6 y la diagonal BD = 10. Un círculo, de centro O, es inscrito en el triángulo CBD, y un círculo, de centro P, es inscrito en el triángulo BAD. Calcula OP.

Solución:





$AD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Aplicando la propiedad de la bisectriz, obtenemos en la figura los valores de 4+r y 6-2r

Por otra parte 4+r = 8-r → r = 2

Luego, $(8-2r)^2 + (6-2r)^2 = x^2 \rightarrow 4^2 + 2^2 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$