Problemas de la 1ª semana

Nivel: 2º de ESO

1º-) Los nueve primeros números impares 1,3,5,7,9,11,13,15,17 son colocados en los nueve cuadrados de la figura, uno en cada cuadrado, de tal forma que la suma de cualquier fila o diagonal es la misma. ¿Cuál es la suma?

Solución:

Suma = 27

1	15	11
5	9	13
7	3	17

2º-) Un niño dispone de monedas cuyos diámetros miden 3 cm y 5 cm. Si las coloca en fila, ¿cuántas monedas de una y otra clase puede tomar para formar una fila de 60 cm de longitud?.

Solución: La ecuación a resolver será 3x+5y=60, donde x e y son las monedas de cada clase.

X= nº de monedas de 3 cm.

Y= nº de monedas de 5 cm.

Puede ser: X=0 → y=12 → $3{\cdot}0 + 5{\cdot}12 = 60$

X=5 → y= 9 → $3{\cdot}5 + 5{\cdot}9 = 60$

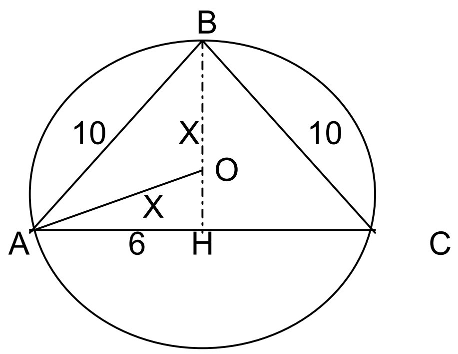
X=10 → y=6 → $3{\cdot}10 + 5{\cdot}6 = 60$

X=15 → y=3 → $3{\cdot}15 + 5{\cdot}3 = 60$

X=20 → y=0 → $3{\cdot}20 + 5{\cdot}0 = 60$

Nivel: 4º de ESO

1º-) Sea ABC un triángulo isósceles. Las longitudes de los lados son AB = 10, BC = 10 y AC = 12. Hallar el radio X = AO del círculo circunscrito.



Solución: La altura BH correspondiente al vértice B es $BH = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

Luego, OH=BH – OB = 8 – x

Aplicando Pitágoras al triángulo AOH: $x^2 = 6^2 + (8 - x)^2$

Resolviendo: $x^2 = 36 + 64 + x^2 - 16x$

$16x = 100 \rightarrow x = 6{,}25$

2º-) Si $a + b = 2$ y $a^2 + b^2 = 5$, ¿cuál es el valor de $a^3 + b^3$?

Solución: Hallamos primero $a \cdot b$

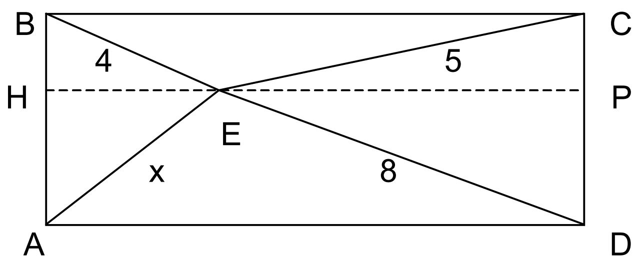
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \rightarrow 2^2 = 5 + 2 \cdot a \cdot b \rightarrow a \cdot b = -\frac{1}{2}$$

Aplicamos el cubo de un binomio: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \rightarrow$

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot a \cdot b \cdot (a + b) \rightarrow 2^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot (\frac{-1}{2}) \cdot 2 \rightarrow a^3 + b^3 = 11$

Nivel Bachillerato

1º-) Sea el rectángulo ABCD. Hallar la longitud del segmento AE.



Solución: Trazamos una paralela a AD por E.

Aplicamos Pitágoras a los triángulos BHE y HEA, y también a ECP y EPD

$4^2 - BH^2 = x^2 - AH^2$

$5^2 - CP^2 = 8^2 - PD^2 \rightarrow$ también: BH = CP y AH = PD, luego restando las igualdades anteriores $\rightarrow -9 = x^2 - 64 \rightarrow x = \sqrt{55}$

2º-) Si $x + \frac{1}{x} = 4$, calcular $x^4 + \frac{1}{x^4}$

Solución: Hallamos $(x^2 + \frac{1}{x^2})$ aplicando la fórmula del binomio

$$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow 4^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

Hallamos $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) \rightarrow$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2} x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{4}{3} x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^2 + 6 + 4 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

$$4^4 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6$$

$$256 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 4 \cdot 14 + 6 \rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$$