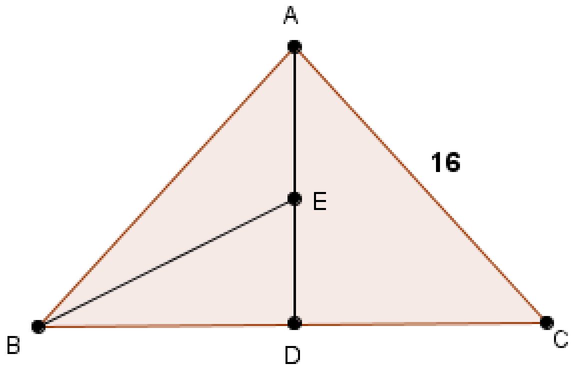
Problemas de la 9ª semana

2º ESO

1º-) Sea ABC un triángulo equilátero de lado 16 cm. Dibujamos la altura AD correspondiente al vértice A y sea E el punto medio de AD. Calcular el segmento BE.

Solución:



$$AD = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad DE = \frac{AD}{2} = 4\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad BE = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

2º-) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar utilizando solamente las cifras 1, 2 y 3?

Solución: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

3º-) Calcular $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\frac{6^3-1}{6^3+1}$

Solución: $\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\frac{63}{65}\cdot\frac{124}{126}\cdot\frac{215}{217} = simplificando = \frac{43}{63}$

4º ESO

1º-) Tres números reales x, y, z verifican que $\frac{x+4}{2} = \frac{y+9}{z-3} = \frac{x+5}{z-5}$. Calcula el cociente $\frac{x}{y}$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+4}{2} = \frac{y+9}{z-3} \\ \frac{x+4}{2} = \frac{x+5}{z-5} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y+18 = x\cdot z - 3x + 4z - 12 \\ 2x+10 = x\cdot z - 5x + 4z - 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y+30+3x = x\cdot z + 4z \\ 2x+30+5x = x\cdot z + 4z \end{array}\right\}$$

$$2y + 30 + 3x = 2x + 30 + 5x \quad \rightarrow \quad 2y = 4x \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

2º-) Calcula el valor de la suma $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{24}}$

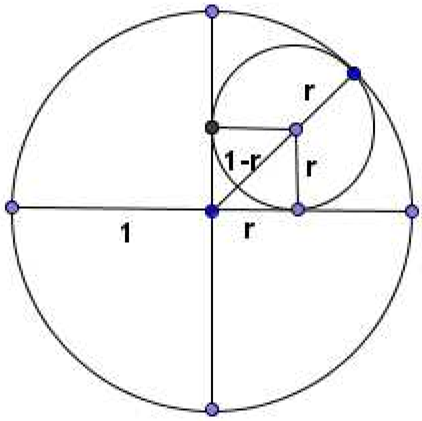
Solución:
Racionalizando:

$$\frac{1\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)} + \frac{1\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} + \frac{1\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1\left(\sqrt{25}-\sqrt{24}\right)}{(\sqrt{25}+\sqrt{24})\left(\sqrt{25}-\sqrt{24}\right)}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} \cdots\cdots\cdots \sqrt{25} - \sqrt{24} = simplificando = \sqrt{25} - \sqrt{1} = 4$$

3º-) Dibujamos un círculo de radio 1 cm. Lo dividimos en 4 partes por dos rectas perpendiculares que pasan por su centro. Inscribimos un círculo más pequeño en una de las partes, ¿cuál es el radio de este círculo?

<u>Solución:</u>



Aplicando el teorema de Pitágoras: $(1-r)^2 = r^2 + r^2 \;\rightarrow\; r^2 + 2r - 1 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt{2} - 1$

<u>Bachillerato</u>

1º-) Calcula $\dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dfrac{4^3-1}{4^3+1} \cdots\cdots\cdots \dfrac{100^3-1}{100^3+1}$

<u>Solución:</u>
Considerando que

$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$

$a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$

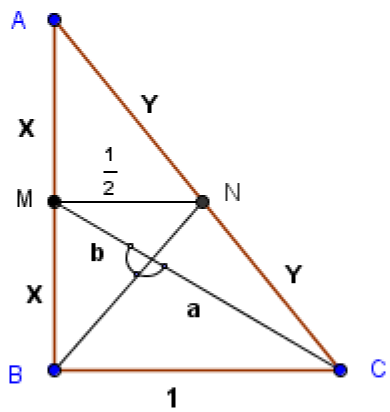
La expresión queda:

$$\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 13}{4\cdot 7} \cdot \frac{3\cdot 21}{5\cdot 13} \cdot \frac{4\cdot 31}{6\cdot 21} \cdot \frac{5\cdot 43}{7\cdot 31} \cdot \frac{6\cdot 57}{8\cdot 43} \cdots\cdots\cdots \frac{99\cdot 10101}{101\cdot 9901} = simplificando =$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots\cdots 99\cdot 10101}{3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots\cdots 100\cdot 101\cdot 9901} = simplificando = \frac{2\cdot 10101}{3\cdot 100\cdot 101} = \frac{3367}{5050}$$

2º-) ABC es un triángulo rectángulo en B. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC. Si BC = 1 y CM es perpendicular a BN, calcular CM.

<u>Solución:</u>



En el triángulo ABC : $(2x)^2+1^2=(2y)^2$

En el triángulo MBC : $1^2-a^2=x^2-b^2$

En el triángulo MNC : $\left(\frac{1}{2}\right)^2-b^2=y^2-a^2$

Sumando las dos últimas igualdades y simplificando queda: $x^2+y^2=\frac{5}{4}$

Resolviendo esta última ecuación con la primera obtenemos: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

En el triángulo MBC se verifica $CM^2=1^2+x^2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow CM=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3º-) Sea la ecuación $x^2-2\cdot(m+1)\cdot x+3m+2=0$

a) Expresar la suma de los cubos de las raíces en función del parámetro m.
b) Calcular el valor de m cuando esta suma sea igual a la suma de las raíces (reales o imaginarias).
c) Compruébense los resultados obtenidos.

Solución:

a) Aplicando las fórmulas de Cardano-Vieta $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2\cdot(m+1) \\ x_1\cdot x_2=3m+2 \end{array}\right\}$

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$8(m+1)^3=x_1^3+x_2^3+3\cdot 2(m+1)(3m+2)$$

$$x_1^3+x_2^3=8(m+1)^3-6(m+1)(3m+2)=2(m+1)\left[4(m+1)^2-3(3m+2)\right]=2(m+1)\left(4m^2-m-2\right)$$

b) $x_1^3+x_2^3=x_1+x_2\rightarrow 2(m+1)\left(4m^2-m-2\right)=2(m+1)$

$m+1=0\rightarrow m=-1$

$4m^2-m-2=1\rightarrow resolviendo\rightarrow m=1;m=\frac{-3}{4}$

c)

$m=-1\rightarrow x^2-1=0\rightarrow x=\pm 1\rightarrow x_1^3+x_2^3=0$

$m=1\rightarrow x^2-4x+5=0\rightarrow resolviendo\rightarrow x_1=2+i\rightarrow x_2=2-i$

$x_1^3+x_2^3=x_1+x_2$

$(2+i)^3+(2-i)^3=4\rightarrow$ *se comprueba que* es cierto

$m=\frac{-3}{4}\rightarrow x^2-2\left(\frac{-3}{4}+1\right)x+3\left(\frac{-3}{4}\right)+2=0\rightarrow 4x^2-2x-1=0\rightarrow$

$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\rightarrow x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$x_1^3+x_2^3=x_1+x_2\rightarrow\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^3=\frac{1}{2}$

desarrollando se verifica que es cierta la igualdad