Problemas de la 4ª semana

2º ESO

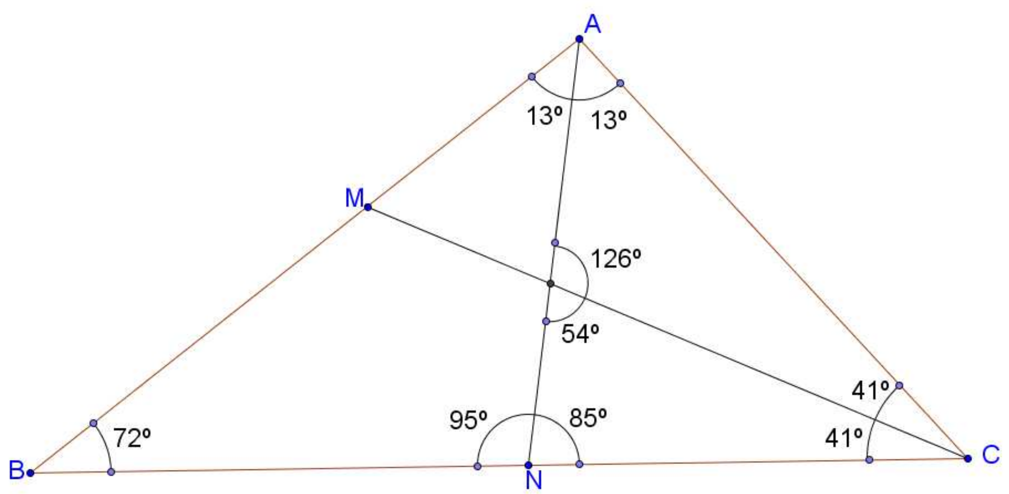
1º-) Si la base de un rectángulo se aumenta un 20% y la altura un 25%, ¿qué tanto por ciento aumenta su área?.

Solución: Sean a y b la base y la altura del rectángulo, su área es A = ab, la base del nuevo rectángulo es a + 0,2a = 1,2a y la altura b + 0,25b = 1,25b, el área de este nuevo rectángulo es A = 1,2a•1,25b = 1,5ab.
Luego el área aumenta 0,5ab, es decir, el 50%.

2º-) Si a, b, y c son números positivos que verifican: a·b = 3 ; b·c = 8 y a·c = 6. Calcular a·b·c

Solución: Multiplicando miembro a miembro las tres igualdades obtenemos:
$a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot a\cdot c = 3\cdot 8\cdot 6 \rightarrow a^2\cdot b^2\cdot c^2 = 144$ → haciendo raíz cuadrada → $a\cdot b\cdot c = 12$.

3º-) La bisectriz del ángulo A forma 85º con el lado opuesto y 54º con la bisectriz del ángulo C. Calcular los ángulos del triángulo.



Solución: CM es bisectriz, luego: $85º + 54º + \frac{C}{2} = 180º \rightarrow \frac{C}{2} = 41º$

Los restantes ángulos son los de la figura. Los ángulos son: A = 26º ; B = 72º C = 82º.

4º ESO

1º-) ¿Cuál es el dígito unidad de 3^{2003} ?

Solución: Calculamos las primeras potencias de 3:
$3^1 = 3 \rightarrow 3^2 = 9 \rightarrow 3^3 = 27 \rightarrow 3^4 = 81 \rightarrow 3^5 = 243 \rightarrow 3^6 = 729$
Vemos que la última cifra se repite cíclicamente cada 4 potencias, luego al dividir el exponente 2003 entre 4 da de resto 3, entonces el dígito unidad de 3^{2003} es el mismo que el dígito unidad de 3^3, es decir, 7.

2º-) Sea ab un número de dos dígitos. La suma de los cubos de los dígitos es 243, y el producto de la suma de los dígitos por el producto de los dígitos es 162. Hallar el número.

Solución:

$$\left.\begin{cases} a^3+b^3=243 \\ (a+b)\cdot ab=162 \end{cases}\right\} \rightarrow \quad (a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$(a+b)^3 = 243+3\cdot 162 = 729 \quad \Rightarrow \quad a+b=\sqrt[3]{729}=9$$

$$\left.\begin{cases} a+b=9 \\ ab=\dfrac{162}{a+b}=\dfrac{162}{9}=18 \end{cases}\right\} \rightarrow \text{ Resolviendo el sistema } \rightarrow a=3 \ ; \ b=6$$

3º-) Un rectángulo es dividido en rectángulos más pequeños, como se muestra en la figura. Si los perímetros de los 5 rectángulos pequeños son los de la figura. Calcular el perímetro del rectángulo grande.

	x	y	z
a		6	
b	12	4	6
c		8	

Solución Consideremos las incógnitas de la figura, se verifica

$$\left.\begin{cases} 2a+2y=6 \rightarrow a+y=3 \\ 2b+2y=4 \rightarrow b+y=2 \\ 2c+2y=8 \rightarrow c+y=4 \\ 2b+2x=12 \rightarrow b+x=6 \\ 2b+2z=6 \rightarrow b+z=3 \end{cases}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Sumando las 3 primeras y} \\ \text{las 2 últimas}\end{array} \rightarrow \left.\begin{cases} a+b+c=9-3y \\ x+z=9-2b \end{cases}\right\}$$

El perímetro es

$$P=2(x+y+z)+2(a+b+c)=2(x+y+z)+18-6y=$$
$$18+2(x+z)-4y=18+2(9-2b)-4y=36-4b-4y=$$
$$36-4(b+y)=36-4\cdot 2=28$$

Bachillerato

1º-) ¿Cuál de los dos números 33^{12} y 63^{10} es mayor?

Solución:

$$33^{12}>32^{12}=\left(2^5\right)^{12}=2^{60}$$
$$63^{10}<64^{10}=\left(2^6\right)^{10}=2^{60}$$
$$\rightarrow \quad 33^{12}>63^{10}$$

2º-) Resolver la ecuación $\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x+6\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x=7$

Solución: Multiplicamos la ecuación por $\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x \rightarrow$

$$\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x+6\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x=7\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x$$

$$\left(\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)\right)^x+6\cdot\left(\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x\right)^2=7\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x$$

$$\left(\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2-7^2}\right)^x+6\cdot\left(\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x\right)^2=7\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x$$

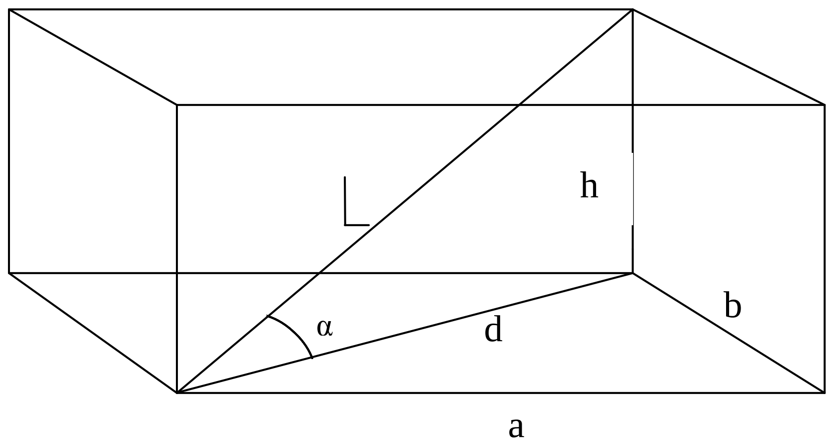
$$1+6\cdot\left(\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x\right)^2=7\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x \Rightarrow \textit{hacemos el cambio } \mathrm{y}=\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x$$

$$1+6y^2=7y\Rightarrow 6y^2-7y+1=0 \;\Rightarrow \textit{resolviendo } \; y=1 \;\; ; y=\frac{1}{6}$$

$$1=\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x \;\Rightarrow x=0 \;\; ; \; \frac{1}{6}=\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x \;\; \textit{tomando} \log \textit{aritmos} \Rightarrow x=\log_{\sqrt{5\sqrt{2}+7}}\left(\frac{1}{6}\right)$$

3º-) La diagonal de un paralelepípedo rectangular es L y forma un ángulo α con el plano de la base. Calcular el área lateral del paralelepípedo si el área de la base es S.

Solución:



$$\left.\begin{cases} d = L\cdot\cos\alpha \\ h = L\cdot sen\alpha \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} a\cdot b = S \\ a^2 + b^2 = L^2\cdot\cos^2\alpha \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} 2\cdot a\cdot b = 2S \\ a^2 + b^2 = L^2\cdot\cos^2\alpha \end{cases}\right\} \Rightarrow sumando$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2S + L^2\cos^2\alpha \Rightarrow (a+b)^2 = 2S + L^2\cos^2\alpha \Rightarrow (a+b) = \sqrt{2S + L^2\cos^2\alpha}$$

$$Área\ lateral = 2\cdot b\cdot h + 2\cdot a\cdot h = 2\cdot h\cdot(a+b) = 2\cdot L\cdot sen\alpha\cdot\sqrt{2S + L^2\cos^2\alpha}$$