Problemas de la 32ª semana

2º ESO

1º-) En la multiplicación indicada A, B, C y D son dígitos diferentes. Calcular A+B.

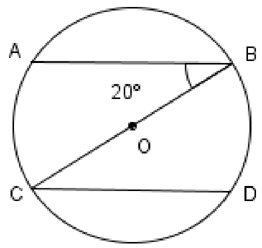
$$\begin{array}{r} ABA \\ \times CD \\ \hline CDCD \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1 \\ \times\ C\ D \\ \hline D\ O\ D \\ C\ O\ C\ \\ \hline C\ D\ C\ D \end{array}$$

A + B = 1 + 0 = 1

2º-) En la figura, $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ es un diámetro. Si el ángulo A $\hat{B}$ C = 20º, Calcular la medida del arco $\overline{BD}$.



Solución:
El ángulo $A\hat{B}C = B\hat{C}D = 20^{o}$, luego el arco $\overset{\frown}{B}\overset{\frown}{D} = 2 \cdot 20^{o} = 40^{o}$

3º-) Si b y c son constantes y $(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6$, calcular c.

Solución:

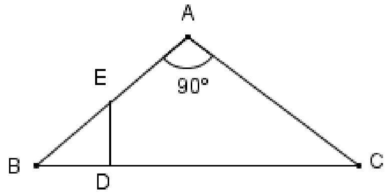
Operando el primer término de la igualdad:
$x^2 + bx + 2x + 2b = x^2 + cx + 6$

$x^2 + (b+2)x + 2b = x^2 + cx + 6 \Rightarrow igualando\ los\ polinomios$

$\left.\begin{cases} b+2=c \\ 2b=6 \end{cases}\right\} \rightarrow b = 3 \Rightarrow 3+2 = c \rightarrow c = 5$

4º ESO

1º-) Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles. Si ED es perpendicular a BC y AC = CD = 2, calcular el área del triángulo EDB.



Solución:

$BC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow BD = 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

El triángulo BED también es rectángulo isósceles, luego BD = DE

Área = $\dfrac{BD \cdot DE}{2} = \dfrac{2\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = 2\left(2+1-2\sqrt{2}\right) = 6-4\sqrt{2}$

2º-) Calcular la suma de las soluciones de la ecuación:

$\sqrt[4]{x} = \dfrac{12}{7-\sqrt[4]{x}}$

Solución:

$Hacemos \rightarrow \sqrt[4]{x} = y \Rightarrow y = \dfrac{12}{7-y} \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow$

$y_1 = 4 \rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 4 \Rightarrow x_1 = 4^4 = 256 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 3 \Rightarrow$

$x_2 = 3^4 = 81 \Rightarrow x_1 + x_2 = 337$

3º-) Sea S = 1 + 2 + 3……..2009. Calcular el resto cuando S se divide entre 1000

Solución:

$S = 1+2+3......2009 =$ es una progresión aritmética cuya d = 1

$S = \dfrac{1+2009}{2}\cdot 2009 = \dfrac{2010}{2}\cdot 2009 = 1005 \cdot 2009 = 2019045$

Al dividir por 1000 el resto es 45.

Bachillerato

1º-) Si $r_1, r_2, r_3 .... r_{1000}$ son las raíces de la ecuación $x^{1000} - 10x + 10 = 0$, calcular $r_1^{1000} + r_2^{1000} + ... r_{1000}^{1000}$.

Solución:

Sustituyendo en la ecuación las raíces :

$$\left\{\begin{array}{l} r_1^{1000} = 10r_1 - 10 \\ r_2^{1000} = 10r_2 - 10 \\ .... \\ r_{1000}^{1000} = 10r_{1000} - 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sumando miembro a mienbro} \\ r_1^{1000} + r_2^{1000} + \cdots\cdots r_{1000}^{1000} = 10\left(r_1 + r_2 + \cdots\cdots r_{1000}\right) - 10\cdot 1000 \\ Por\ \ Cardano \rightarrow r_1 + r_2 + \cdots\cdots r_{1000} = 0 \rightarrow \\ r_1^{1000} + r_2^{1000} + \cdots\cdots r_{1000}^{1000} = -10.000 \end{array}\right\}$$

2º-) Calcular el valor de c para que el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{matrix} |x+y| = 2009 \\ |x-y| = c \end{matrix}\right\}$ tenga exactamente 2 soluciones (x, y) en los números reales.

Solución:

Podemos considerar 3 casos:

a-) c = 0 $\Rightarrow$ x = y $\Rightarrow$ las soluciones son: $\left(\frac{2009}{2}, \frac{2009}{2}\right)$ y $\left(-\frac{2009}{2}, -\frac{2009}{2}\right)$

b-) Si c < 0 $\Rightarrow$ no hay soluciones para la segunda ecuación.

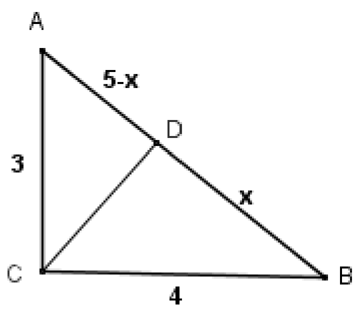
c-) Si c > 0 $\Rightarrow$ hay 4 soluciones para 4 sistemas

$$\left\{\begin{matrix} x+y = \pm 2007 \\ x-y = \pm c \end{matrix}\right\}$$

Luego la solución es c = 0.

3º-) Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Los catetos miden AC = 3 y BC = 4. Dibujamos la altura CD, con D en AB. La longitud de CD puede ser expresada como $\frac{p}{q}$, donde p y q son números naturales primos entre sí. Calcular p+q.

Solución:



$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\begin{cases} CD^2 = x(5-x) \rightarrow \textit{Aplicando} \text{ el teorema de la altura.} \\ CD^2 = 3^2 - (5-x)^2 = 4^2 - x^2 \rightarrow \textit{Aplicando} \text{ Pitágoras.} \end{cases}$$

Resolviendo la 2ª ecuación:

$$9 - 25 - x^2 + 10x = 16 - x^2 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$CD^2 = \frac{16}{5} \cdot \left(5 - \frac{16}{5}\right) = \frac{16}{5} \cdot \frac{9}{5} \Rightarrow CD = \sqrt{\frac{16 \cdot 9}{25}} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{p}{q} \Rightarrow \quad p + q = 12 + 5 = 17$$