Problemas de la 28ª semana

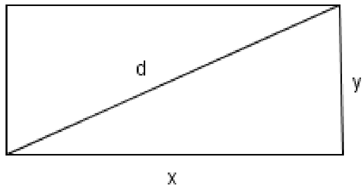
2º ESO

1º-) El perímetro de un rectángulo es 64cm. La razón entre la base y la altura es $\frac{5}{3}$.

Calcular la diagonal del rectángulo.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} perímetro = 2x + 2y = 64 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{array}\right\}$$



$$x = \frac{5y}{3} \Rightarrow 2 \cdot \frac{5y}{3} + 2y = 64 \Rightarrow$$

$$\frac{10y}{3} + 2y = 64 \Rightarrow 10y + 6y = 192 \Rightarrow$$

$$16y = 192 \Rightarrow y = \frac{192}{16} = 12 \Rightarrow$$

$$x = \frac{5y}{3} = \frac{5 \cdot 12}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20^2 + 12^2} = \sqrt{400 + 144} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34}$$

2º-) Se toman 2322 dígitos para numerar las paginas de un libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Solución:

Las nueve primeras páginas tienen 9 dígitos.
Las 90 siguientes páginas tienen $2 \cdot 90 = 180$ dígitos.
De la página 100 en adelante tienen 3 dígitos, luego quedan 2322-189=2133 dígitos.
$\frac{2133}{3} = 711$ páginas.
Total páginas: 711 + 90 + 9 = 810

3º-) El número 2002 se llama capicúa porque se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. El número 1 también es capicúa. ¿Cuántos capicúas hay entre 1 y 2002 (ambos inclusive)?

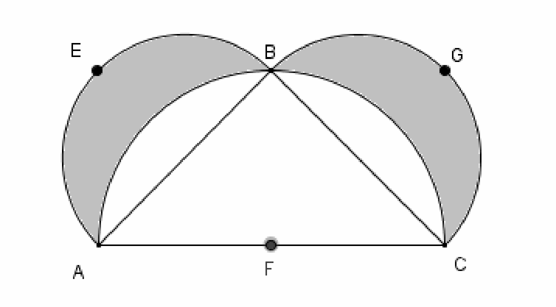
Solución:

Del 1 al 9 hay 9 capicúas
Del 10 al 99 hay 9 capicúas
Del 100 al 999 hay 10 × 9 = 90 capicúas
Del 1000 al 1999 hay 10 capicúas
Y el 2002.
Total: 9 + 9 + 90 + 10 + 1 = 119

4º ESO

1º-) En la figura, ABC, AEB y CGB son semicírculos. F es el punto medio de AC. AF = FC = 1 y AB = BC. Calcular el área de la región sombreada.

Solución:



AF=1$\Rightarrow$AF=FB=1$\Rightarrow$ AB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. La figura es simétrica respecto de la recta BF.

Área figura sombreada = 2· [área AEB – área AB + área triángulo ABF]

área AEB = $\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{4}=\frac{\pi}{4}$

área AB = $\frac{\pi}{4}\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$

área triángulo ABF = $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=1/2$

Área figura sombreada = $2\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]=1$

2º-) Simplificar la expresión: $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$

Solución:

$\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}=N\Rightarrow$ Elevamos al cuadrado

$\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2=N^2\Rightarrow 6+\sqrt{11}-2\sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right)\left(6-\sqrt{11}\right)}+6-\sqrt{11}=N^2\Rightarrow$

$12-2\sqrt{36-11}=N^2\Rightarrow 12-2\cdot 5=N^2\Rightarrow 2=N^2\Rightarrow N=\sqrt{2}$

3º-) Calcular x si: $x+x^3+x^5+x^7+.........=2$

Solución:

Es una progresión geométrica infinita de razón: $r=x^2\Rightarrow$

$S=\frac{a_1}{1-r}\Rightarrow 2=\frac{x}{1-x^2}\Rightarrow 2-2x^2=x\Rightarrow 2x^2+x-2=0\Rightarrow$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

Bachillerato

1º-) La suma de los números de 3 dígitos 35x y 4y7 es divisible por 36. Calcular los posibles valores de x e y.

Solución:

$35x + 4y7 = 36\,(\text{múltiplo de }36) \Rightarrow$

$x + 50 + 300 + 7 + 10y + 400 = 36(\textit{múltiplo de } 36) \Rightarrow x + 10y + 757 = 36(\textit{múltiplo de } 36) \Rightarrow$

$x = 36(\textit{múltiplo de } 36) - 757 - 10y$

x e y son números naturales comprendidos entre 0 y 9 ambos incluidos.

El múltiplo de 36 más próximo a 757 es $36 \cdot 22 = 792$ luego, $x = 36 \cdot 22 - 757 - 10y = 35 - 10y \Rightarrow$ De aquí deducimos que y = 3 $\rightarrow$x = 5

El siguiente múltiplo es:

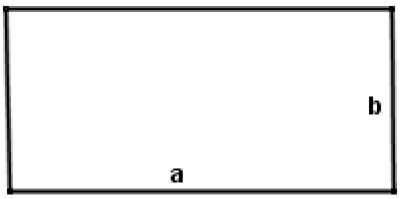
$36 \cdot 23 = 828 \Rightarrow x = 36 \cdot 23 - 757 - 10y \Rightarrow x = 828 - 757 - 10y = 71 - 10y$

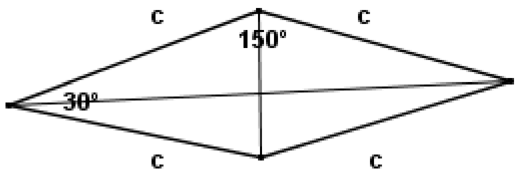
Si y = 7 $\rightarrow$x = 1

Después de estos múltiplos la ecuación es imposible.

2º) El perímetro y el área de un rectángulo son iguales al perímetro y al área de un rombo que tiene un ángulo de 30º. Calcular la razón de los lados del rectángulo.

Solución:





$\textit{perímetro} = 2a + 2b \rightarrow \textit{área} = a \cdot b$ $\qquad$ $\textit{perímetro} = 4c \rightarrow \textit{área} = \dfrac{D \cdot d}{2}$

$$\left\{ \frac{d}{2} = c \cdot \cos 75º \rightarrow d = 2c \cdot \cos 75º \rightarrow \frac{D}{2} = c \cdot sen 75º \rightarrow D = 2c \cdot sen 75º \right.$$

$$A = \frac{2c \cdot sen 75º \cdot 2c \cdot \cos 75º}{2} = c^2 sen 150º = c^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{c^2}{2}$$

Luego: $\left\{ \begin{array}{l} 2a + 2b = 4c \\ ab = \dfrac{c^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 2c \rightarrow c = \dfrac{a+b}{2}$

$$a \cdot b = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow ab = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{8} \Rightarrow 8ab = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow$$

$a^2 + b^2 - 6ab = 0 \Rightarrow \textit{Dividimos por } b^2$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 - \frac{6a}{b} = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = y \Rightarrow y^2 - 6y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow luego \frac{a}{b} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

3º-) Resolver la ecuación: $\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x} = 1$

<u>Solución:</u>

$\sqrt[3]{x+4} = 1 + \sqrt[3]{x} \rightarrow$ elevamos al cubo:

$x + 4 = 1 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + x \rightarrow 3 = 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} \rightarrow 1 = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$

Hacemos el cambio: $\sqrt[3]{x} = y \Rightarrow$

$$y^2 + y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow luego :\rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5} - 15 + 3\sqrt{5} - 1}{8} = \sqrt{5} - 2 \rightarrow x = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = -\sqrt{5} - 2$$