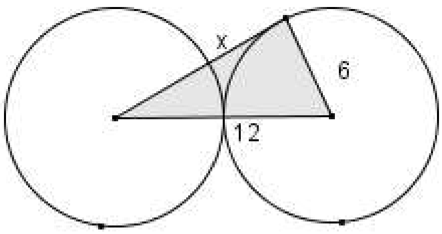
Problemas de la 27ª semana

2º ESO

1º-) Dos círculos de radios 6cm son externamente tangentes. Calcular la longitud de la tangente trazada desde el centro de un círculo al otro círculo.

Soluciones:



$$x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

2º-) Sean los números: A = $\frac{7}{8}$; B = $\frac{66}{77}$; C = $\frac{555}{666}$; D = $\frac{4444}{5555}$

¿Cuál es el más grande?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{7}{8} \\ B = \frac{66}{77} = \frac{6 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{6}{7} \\ C = \frac{555}{666} = \frac{5 \cdot 111}{6 \cdot 111} = \frac{5}{6} \\ D = \frac{4444}{5555} = \frac{4 \cdot 1111}{5 \cdot 1111} = \frac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5} \rightarrow m.c.m. = 840$$

$\frac{735}{840}, \frac{720}{840}, \frac{700}{840}, \frac{672}{840}$. El mayor es $\frac{7}{8}$

3º-) ¿Qué número es mayor: 1^{44}; 2^{33}; 3^{22}; 4^{11}?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{44} = \left(1^4\right)^{11} = 1^{11} \\ 2^{33} = \left(2^3\right)^{11} = 8^{11} \\ 3^{22} = \left(3^2\right)^{11} = 9^{11} \\ 4^{11} = 4^{11} \end{array}\right\} \text{ El mayor es: } 9^{11} = 3^{22}$$

4º ESO

1º-) Calcular: $(\log_4 8)\cdot(\log_{27} 9)$

Solución:

$$\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\log_{27} 9 = y \Rightarrow 27^y = 9 \Rightarrow 3^{3y} = 3^2 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$\log_4 8 \cdot \log_{27} 9 = x \cdot y = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1$$

2º-) Si f(x) es tal que $f(1-x) + (1-x)\,f(x) = 5$, calcular $f(5)$.

Solución:

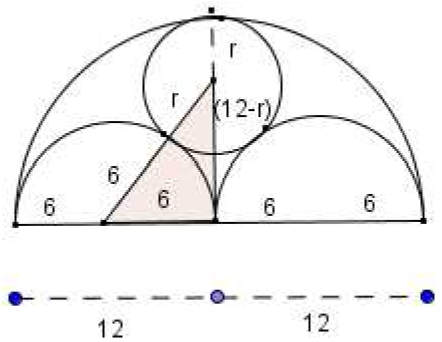
$$\left.\begin{array}{l} Si\;\; x = 5 \Rightarrow f(-4) + (-4)\cdot f(5) = 5 \\ Si\;\; x = -4 \Rightarrow f(5) + 5\,f(-4) = 5 \end{array}\right\} \text{ multiplicamos la 1ª igualdad por (-5)}$$

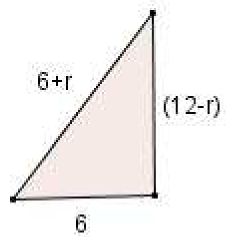
$$\left.\begin{array}{r} -5\,f(-4) + 20\,f(5) = -25 \\ 5\,f(-4) + f(5) = 5 \end{array}\right\} \text{ sumamos miembro a miembro}$$

$$21\,f(5) = -20 \rightarrow f(5) = -\frac{20}{21}$$

3º-) Dos semicircunferencias de radios 6cm son inscritas en una semicircunferencia de radio 12cm. Una circunferencia es inscrita de tal forma que es tangente a las 3 semicircunferencias. Calcular el radio de esta circunferencia.

Soluciones:





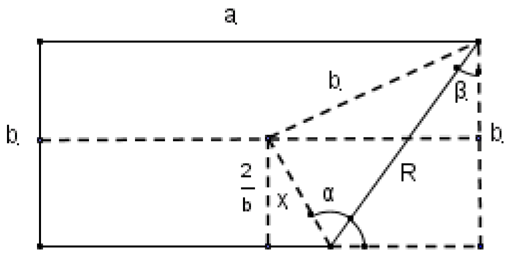
$$(6+r)^2 = 6^2 + (12-r)^2 \Rightarrow 36 + r^2 + 12r = 36 + 144 + r^2 - 24r \Rightarrow$$

$$12r = 14 - 24r \Rightarrow 36r = 144 \Rightarrow r = \frac{144}{36} = 4$$

Bachillerato.

1º-) Consideremos un rectángulo de lados a y b. Dibujemos una paralela a uno de los lados por los puntos medios de los otros. Tomemos un vértice del rectángulo y lo doblamos hasta que caiga en la recta paralela. Demostrar que el ángulo agudo del trapecio obtenido es 60º.

Solución:



$$\alpha+\beta=90^\circ\Rightarrow$$
$$x=R\cdot\cos\alpha=R\cdot sen\beta \quad (1)$$
$$b=R\cdot\cos\beta=R\cdot sen\alpha \quad (2)$$
$$\frac{b}{2}=x\cdot sen(180-2\alpha)=x\cdot sen2\alpha\rightarrow$$
$$b=2x\cdot sen2\alpha \quad (3)$$

$$(2)=(3)\Rightarrow R\cdot sen\alpha=2x\cdot 2sen\alpha\cdot\cos\alpha\Rightarrow R=4x\cdot\cos\alpha$$

$$De\ \ (1)\Rightarrow x=R\cos\alpha\Rightarrow x=4x\cos\alpha\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\alpha=60^\circ\Rightarrow luego\beta=30^\circ\Rightarrow$$

Por tanto el ángulo pedido es 60º

2º-) Consideremos la sucesión: $a_n=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2},\quad (n\geq 1)$

Demostrar que: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+................\frac{1}{a_{20}}$ es un entero.

Solución:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{1+(1+\frac{1}{n})^2}+\sqrt{1+(1-\frac{1}{n})^2}}=\frac{\sqrt{1+(1+\frac{1}{n})^2}-\sqrt{1+(1-\frac{1}{n})^2}}{1+(1+\frac{1}{n})^2-1-(1-\frac{1}{n})^2}=\frac{n}{4}\left(\sqrt{1+(1+\frac{1}{n})^2}-\sqrt{1+(1-\frac{1}{n})^2}\right)$$

Luego: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+................\frac{1}{a_{20}}=$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{1})+\frac{2}{4}(\sqrt{1+\frac{9}{4}}-\sqrt{1+\frac{1}{4}})+\frac{3}{4}(\sqrt{1+\frac{9}{16}}-\sqrt{1+\frac{4}{9}})+$$

$$+\frac{4}{4}(\sqrt{1+\frac{25}{16}-\sqrt{1+\frac{9}{16}}})+.......\frac{19}{4}(\sqrt{1+(\frac{20}{19})^2}-\sqrt{1+(\frac{18}{19})^2})+\frac{20}{4}(\sqrt{1+(\frac{21}{20})^2}-\sqrt{1+(\frac{19}{20})^2})=$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{1})+\frac{2}{4}(\sqrt{\frac{13}{4}}-\sqrt{\frac{5}{4}})+\frac{3}{4}(\sqrt{\frac{25}{9}}-\sqrt{\frac{13}{9}})+\frac{4}{4}(\sqrt{\frac{41}{16}}-\sqrt{\frac{25}{16}})+\frac{5}{4}(\sqrt{\frac{61}{25}}-\sqrt{\frac{41}{25}})......$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{4}\left(\sqrt{13}-\sqrt{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\sqrt{25}-\sqrt{13}\right)+\frac{1}{4}(\sqrt{41}-\sqrt{25})+\frac{1}{4}(\sqrt{61}-\sqrt{41})+........=$$

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1+\sqrt{13}-\sqrt{5}+5-\sqrt{13}+\sqrt{41}-\sqrt{25}.........\sqrt{761}-\sqrt{685}+\sqrt{841}-\sqrt{961}\right)$$

$\rightarrow$ pero se simplifican todos excepto el 2º y el penúltimo.

$$=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{841})=\frac{1}{4}(-1+29)=\frac{1}{4}\cdot 28=7$$

3º-) Sean a, b y c las raíces de $x^3-9x^2+11x-1=0;\, y$ sea $s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.
Calcular s^4-18s^2-8s

Solución:

Por Cardano

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ ab+bc+ac=11 \\ abc=1 \end{cases}$$

$$s^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)=9+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

$$s^4=81+4\left(ab+bc+ac+2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ac}+2c\sqrt{ab}\right)+36\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

$$luego: s^4-18s^2-8s=$$

$$81+4(ab+bc+ac)+8\left(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}\right)+36\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)-$$

$$-18\cdot 9-36\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)-8\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=$$

$$81+4\cdot 11+8\left[a\sqrt{bc}-\sqrt{a}+b\sqrt{ac}-\sqrt{b}+c\sqrt{ab}-\sqrt{c}\right]-18\cdot 9=$$

$$=81+44-162+8\left[\sqrt{a}\left(\sqrt{abc}-1\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{abc}-1\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{abc}-1\right)\right]=\text{sabiendo que } abc=1\rightarrow$$

$$=-37$$