# Problemas de la 26ª semana

## 2º ESO

1- ) La media de un grupo de alumnos en un examen de matemáticas fue 75. Sin embargo un alumno obtuvo un 0. Si quitamos este alumno del grupo la media que se obtiene es 78. ¿Cuántos alumnos hay en el grupo?

**Solución:**

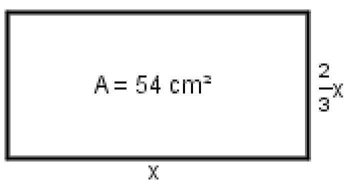
Suma de todas las notas $= 75 \cdot n$ ; siendo n el número de alumnos. Si quitamos el alumno de 0, la suma de las notas no varía pero hay un alumno menos, luego:

Suma de todas las notas $= 78 \cdot (n-1)$

$75n = 78(n-1) \Rightarrow 75n = 78n - 78 \Rightarrow 3n = 78 \Rightarrow n = 26 alumnos$

2- ) El área de un rectángulo es $54\,cm^2$. Si la altura es $\frac{2}{3}$ de la base, calcular el perímetro del rectángulo.

**Solución:**




$A = base \times altura \Rightarrow 54 = x \cdot \frac{2}{3} x \Rightarrow$

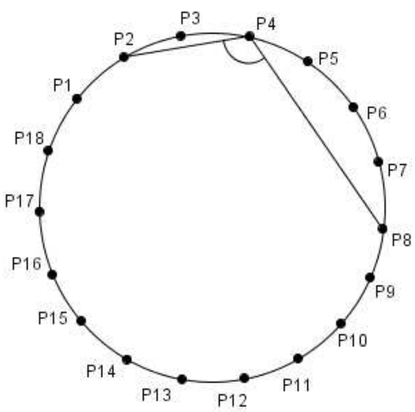
$54 \cdot 3 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$

$base = 9 \rightarrow altura = \frac{2}{3} \cdot 9 = 3$

$Perímetro = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 6 = 18 + 12 = 30 cm$

3-) 18 puntos $P_1, P_2, P_3, ..........P_{18}$ son colocados en una circunferencia igualmente separados. ¿Cuál es la medida del ángulo $P_2 \hat{P}_4 P_8$?

**Solución:**




Hay 18 arcos de circunferencia $P_1P_2$, $P_2P_3$.................$P_{18}P_1$

Cada arco mide: $\frac{360}{18} = 20º$

El ángulo $P_2 \hat{P}_4 P_8$ es inscrito luego es la mitad del arco que abarca:

$$P_2 \hat{P}_4 P_8 = \frac{12 \ ar\cos}{2} = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120º$$

# 4º ESO

1- ) El símbolo $37_b$ representa el número 37 escrito en base b. Si $37_b$ es la mitad de $73_b$ , ¿cuál es b?

**Solución:**

$$37_b = 7+3b \Rightarrow 73_b = 3+7b \Rightarrow 7+3b = \frac{1}{2}(3+7b) \Rightarrow 14+6b = 3+7b \Rightarrow b = 11$$

2- ) La suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica es 189, la suma de los 6 primeros términos es 381 y la suma de los 7 primeros términos es 765. Calcular la razón de la progresión geométrica.

**Solución:**

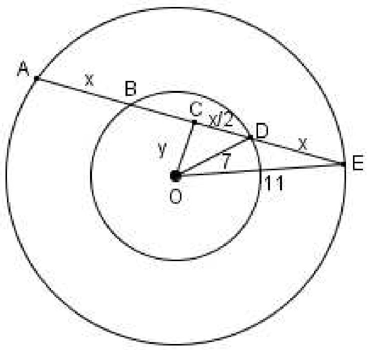
$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=189 \\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=381 \end{array}\right\} \Rightarrow a_6 = 381-189 = 192$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 = 765 \rightarrow a_7 = 765-381 = 384$$

$$r = \frac{a_7}{a_6} = \frac{384}{192} = 2$$

3- ) Tenemos dos círculos concéntricos de radios 7 y 11. Se dibuja una cuerda que al cortar a los dos círculos queda dividida en 3 partes iguales. Calcular la longitud de la cuerda.

**Solución:**




Aplicando Pitágoras a los triángulos OCD y OCE.

$$y^2 = 7^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 11^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2$$

$$49 - \frac{x^2}{4} = 121 - \frac{9x^2}{4} \Rightarrow \frac{9x^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 121 - 49$$

$$2x^2 = 72 \rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$$

Longitud de la cuerda $AE = 3 \cdot x = 18$

## Bachillerato

1- ) Demostrar que $17^{2007}+22^{2007}$ es múltiplo de 13.

**Solución:**

$17^{2007}\rightarrow 17\equiv 4(\mathrm{mod}13)\rightarrow 17^{2007}\equiv 4^{2007}(\mathrm{mod}13)\equiv\left(4^{12}\right)^{167}\cdot 4^{3}\Rightarrow$ *por otra parte*

$4^{12}=4^{13-1}\equiv 1(\mathrm{mod}13)\Rightarrow\left(4^{12}\right)^{167}\equiv 1(\mathrm{mod}13)\Rightarrow\left(4^{12}\right)^{167}\cdot 4^{3}\equiv 4^{3}(\mathrm{mod}13)\equiv 4^{3}(\mathrm{mod}13)\equiv$
$\equiv 12(\mathrm{mod}13)$

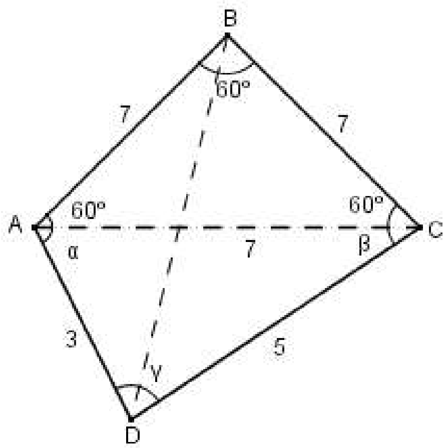
$22^{2007}\rightarrow 22\equiv 9(\mathrm{mod}13)\Rightarrow 22^{2007}\equiv 9^{2007}(\mathrm{mod}13)=\left(9^{12}\right)^{167}\cdot 9^{3}(\mathrm{mod}13)\equiv$

$\equiv 9^{3}(\mathrm{mod}13)\equiv 1(\mathrm{mod}13)$

$$\left.\begin{cases}17^{2007}\equiv 12(\mathrm{mod}13)\\ 22^{2007}\equiv 1(\mathrm{mod}13)\end{cases}\right\}\rightarrow 17^{2007}+22^{2007}\equiv 13(\mathrm{mod}13)\equiv 0(\mathrm{mod}13)$$

2- ) Un cuadrilátero convexo tiene de lados: AB = BC = 7; CD = 5 y AD = 3. Si el ángulo $\hat{B}=60^{\circ}$, calcular BD.

**Solución:**




El triángulo $ABC$ es equilátero ya que $\hat{B}=60^{\circ}$ y AB = BC.

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo ACD

$7^{2}=5^{2}+3^{2}-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\gamma\rightarrow$

$\cos\gamma=\frac{-1}{2}\rightarrow\gamma=120^{\circ}$

Teorema de los senos:

$$\frac{3}{sen\ \beta}=\frac{5}{sen\ \alpha}=\frac{7}{sen\,120^{\circ}}$$

$$sen\ \beta=\frac{3\sqrt{3}}{14};\ sen\ \alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\cos\ \alpha=\sqrt{1-\frac{75}{14^{2}}}=\frac{11}{14}$$

Teorema del coseno al triángulo ABD:

$$BD^{2}=7^{2}+3^{2}-2\cdot 3\cdot 7\cdot\cos(60+\alpha)=49+9-42(\cos 60\cdot\cos\alpha-sen60\cdot sen\alpha)=64$$

3- ) Resolver en Z: $sen\left[\frac{\pi}{3}\left(x-\sqrt{x^2-3x-12}\right)\right]=0$

**Solución:**

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\left(x-\sqrt{x^2-3x-12}\right)\right)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}\left(x-\sqrt{x^2-3x-12}\right)=K\pi \rightarrow K\in N$$

$$x-\sqrt{x^2-3x-12}=3K \Rightarrow x-3K=\sqrt{x^2-3x-12} \Rightarrow$$

$$x^2+9K^2-6Kx=x^2-3x-12 \Rightarrow x=\frac{3K^2+4}{2k-1} \Rightarrow dividiendo$$

$$x=\frac{3}{2}K+\frac{3}{4}+\frac{19}{4(2K-1)}=\frac{6K+3}{4}+\frac{19}{4(2K-1)}=\frac{1}{4}\left[6K+3+\frac{19}{2K-1}\right]$$

$$\rightarrow \frac{19}{2K-1} \rightarrow Tiene\ \ que\ \ ser\ \ entero$$

$$K=0 \rightarrow x=\frac{1}{4}[3-19]=-4$$

$$K=1 \rightarrow x=\frac{1}{4}[9+19]=7$$

$$K=10 \rightarrow x=\frac{1}{4}[63+1]=16$$

$$K=-9 \rightarrow x=\frac{1}{4}[-51-1]=-13$$

$$x=-4 \Rightarrow sen\frac{\pi}{3}(-4-4)=sen\left(\frac{-8\pi}{3}\right) \notin\ Z$$

$$x=7 \Rightarrow sen\frac{\pi}{3}(7-4)=sen\pi=0 \rightarrow solución$$

$$x=16 \Rightarrow sen\frac{\pi}{3}(16-14)=sen\frac{2\pi}{3} \notin\ \mathrm{Z}$$

$$\mathrm{x = -13} \Rightarrow sen\frac{\pi}{3}(-13-14)=sen(-9\pi)=0 \rightarrow solución$$