Problemas de la 25ª semana

2º ESO

1º-) Cinco estudiantes hicieron un examen de matemáticas. Tres obtuvieron una media de 80 puntos y dos una media de 55 puntos. ¿Cuál fue la media de los cinco?

Solución:

$$80\times 3 = 240 \rightarrow 55\times 2 = 110 \rightarrow total = 350 \rightarrow 350:5 = 70\,puntos$$

2º-) Hallar el valor de n: $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = 5^5$

Solución:

$$5^n \cdot 5 = 5^5 \rightarrow 5^{n+1} = 5^5 \rightarrow n+1 = 5 \rightarrow n = 4$$

3º-) En un triángulo, un ángulo es el triple de otro y el tercero es 20º más grande que la suma de los otros dos. Calcula los ángulos del triángulo.

Solución:

$1^{er}\ ángulo = \alpha\ ;\ 2º = 3\alpha\ ;\ 3º = 20º + \alpha + 3\alpha$

$1º + 2º + 3º = 180º \rightarrow \alpha + 3\alpha + 20º + \alpha + 3\alpha = 180º \rightarrow \alpha = 20º$

$1^{er}\ ángulo = 20º\ ;\ 2º\,ángulo = 60º\ ;\ 3^{er}\ ángulo = 160º$

4º ESO

1º-) Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $3x^2 + 7x + c = 0,\ \ (c \neq 0)$. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$?

Solución:

Por Cardano:

$$\left.\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{7}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3} \end{cases}\right\} \rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\dfrac{7}{3}}{\dfrac{c}{3}} = -\frac{7}{c}$$

2º-) Si $c=\log_x b$ y $d=\log_{x^2}(b^2)$, ¿qué relación existe entre d y c?

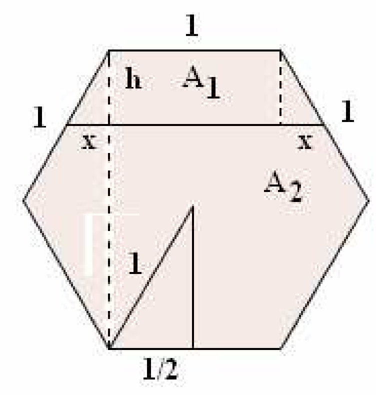
Solución:

$$\left.\begin{cases} si\ \ c=\log_x b \to x^c=b \\ si\ \ \mathrm{d}=\log_{x^2} b^2 \to (x^2)^d=b^2 \end{cases}\right\} \to \left.\begin{cases} (x^c)^2=b^2 \\ (x^2)^d=b^2 \end{cases}\right\} \to (x^c)^2=(x^2)^d \to$$

$$\to (x^2)^c=(x^2)^d \to d=c$$

3º-) Un segmento paralelo a un lado de un hexágono regular de lado 1 divide al hexágono en dos partes cuyas áreas están en la razón $\frac{1}{2}$. Calcular la longitud del segmento.

Solución:



$$\frac{A_1}{A_2}=1/2 \to A_2=2A_1 \to A_1+A_2=\frac{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\to$$

$$3A_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}\to A_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\to$$

$$\to \sqrt{3}=\frac{h}{x}\to \frac{2x+1+1}{2}\cdot\sqrt{3}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\to$$

$$(2x+2)\sqrt{3}x=\sqrt{3}$$

$$2x^2+2x=1\to 2x^2+2x-1=0\to$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}=\to$$

$$\to \left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\to l=2x+1=\sqrt{3}\right.$$

Bachillerato

1º-) Calcula x^2 si $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$

Solución:

$$\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3\to x+9-3\cdot\sqrt[3]{(x+9)^2(x-9)}+3\cdot\sqrt[3]{(x+9)(x-9)^2}-(x-9)=27$$

$$3\cdot\sqrt[3]{(x^2-81)(x-9)}-3\cdot\sqrt[3]{(x^2-81)(x+9)}=9\to\sqrt[3]{(x^2-81)}\cdot\left[\sqrt[3]{x-9}-\sqrt[3]{x+9}\right]=3$$

$$\sqrt[3]{(x^2-81)}\cdot(-3)=3\to\sqrt[3]{x^2-81}=-1\to x^2-81=-1\to x^2=80$$

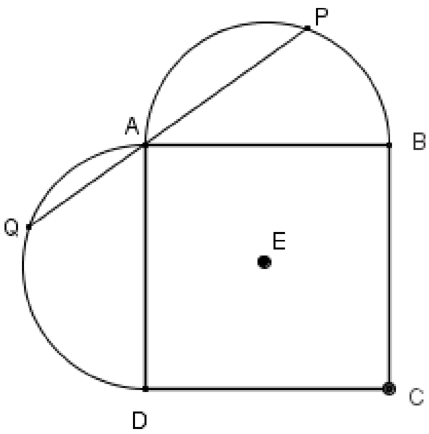
2º-) Sean a, b y c las raíces de la ecuación $x^3 - 4x^2 + 8x - 11$. Calcular $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$.

Solución:

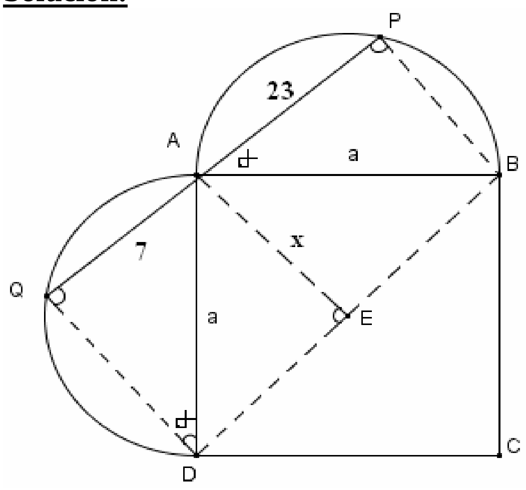
Por Cardano:

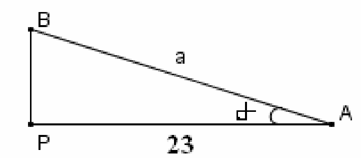
$$\left.\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=8 \\ abc=11 \end{cases}\right\} \rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac} = \frac{c+a+b}{abc} = \frac{4}{11}$$

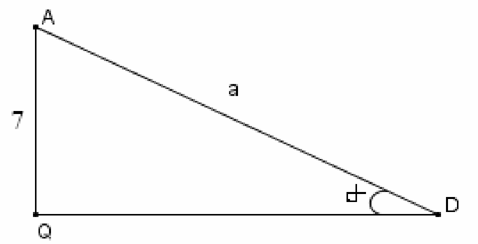
3º-) Sea un cuadrado ABCD. Dos semicircunferencias son dibujadas en dos lados del cuadrado. El punto E es el centro del cuadrado y QAP es un segmento con QA = 7 y AP = 23. Calcular AE.



Solución:







Los triángulos BPA y AQD son semejantes $\rightarrow \frac{7}{BP} = \frac{23}{QD} = \frac{a}{a} = 1 \rightarrow BP = 7$ y QD = 23

La hipotenusa será: $a = \sqrt{7^2 + 23^2} = \sqrt{578} \rightarrow a^2 = 578$

El triángulo AED es rectángulo isósceles $\rightarrow x^2 + x^2 = a^2 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 = a^2 \rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{578}{2} = 289 \rightarrow x = \sqrt{289} = 17$