Problemas de la 2ª semana

2º ESO

1º-) Dadas las fracciones $\frac{355}{113}\, y \,\frac{333}{106}$. a) ¿Cuál es la mayor?. b) ¿Son irreducibles?.

Solución: a) Reducimos a denominador común $\Rightarrow$ $\frac{355}{113}\, y \,\frac{333}{106}$ $\Rightarrow$ $\frac{355\cdot 106}{113\cdot 106}\, y \,\frac{333\cdot 113}{113\cdot 106}$ $\Rightarrow$ $\frac{37630}{11978}\, y \,\frac{37629}{11978}$ $\Rightarrow$ luego es mayor $\frac{355}{113}$

b) $355 = 5\cdot 71$

$106 = 2\cdot 53$

$333 = 3^2\cdot 37$

$113 = 113$

$\frac{355}{113} = \frac{5\cdot 71}{113}$

$\frac{333}{106} = \frac{3^2\cdot 37}{2\cdot 53}$ luego son irreducibles.

2º-) Hallar el menor múltiplo común de 72 y 150 que tenga cinco cifras.

Solución: Hallamos el m.c.m. de 72 y 150

$\left\{\begin{matrix} 72 = 2^3\cdot 3^2 \\ 150 = 2\cdot 3\cdot 5^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m.c.m. = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2 = 1.800$ $\Rightarrow$ el múltiplo común de 72 y 150 es múltiplo de 1.800 $\Rightarrow$ $1.800\cdot 6 = 10.800$

Nivel 4º ESO

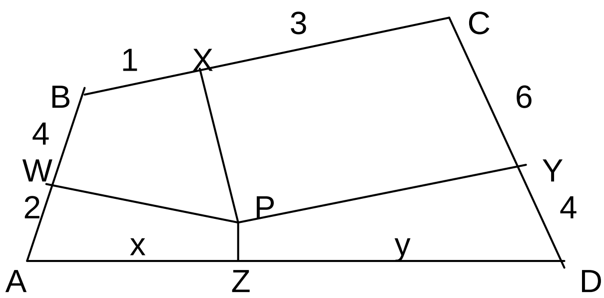
1º-) En un número de 6 cifras, la primera de la izquierda es la unidad. Si se lleva esta cifra al primer lugar de la derecha, el número obtenido es el triple del primitivo. Calcular ese número.

Solución: El número es 1 a b c d e $\Rightarrow$ si llevamos 1 al primer lugar de la derecha $\Rightarrow$ a b c d e 1

```
     4  2  8  5  7
  1  a  b  c  d  e
                x 3
-------------------
  a  b  c  d  e  1
  4  2  8  5  7
```

El número es 142.857

2º-) Sea el cuadrilátero ABCD. Se toma un punto P de su interior y se dibujan las perpendiculares PW, PX, PY y PZ. Si AW = 2, WB = 4, BX = 1, XC = 3, CY =6 y YD = 4. Demostrar que Z es el punto medio de AD.



Solución: Dibujamos la recta PC y se forman dos triángulos rectángulos: PXC y PCY. Aplicando Pitágoras $\Rightarrow$ $9 + PX^2 = 36 + PY^2$

Análogo dibujamos $\Rightarrow$ $PY^2 + 16 = y^2 + PZ^2$

PD, PA y PB. $\Rightarrow$ $PZ^2 + x^2 = 4 + PW^2$

$\Rightarrow$ $PW^2 + 16 = 1 + PX^2$

$XP^2 - PY^2 = 27$
$PY^2 - PZ^2 = y^2 - 16$
$PZ^2 - PW^2 = 4 - x^2$
$PW^2 - PX^2 = 1 - 16$ Sumando

$0 = y^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = y$

Nivel Bachillerato

1º-) Calcular la suma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{16}+\frac{4}{25}+\frac{1}{8}+\frac{2}{27}+\frac{3}{64}+\frac{4}{125}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Solución: Sumamos por partes

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ .... es una progresión geométrica infinita de razón

$$r=\frac{1}{2} \Rightarrow S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots\cdots\cdots \Rightarrow \quad r=\frac{1}{3} \Rightarrow S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

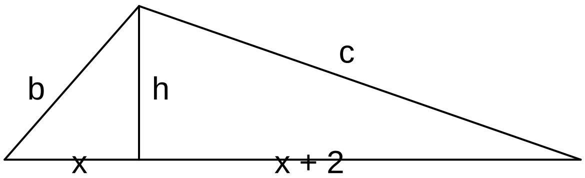
$$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\cdots\cdots\cdots\Rightarrow \quad r=\frac{1}{4}\Rightarrow S=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$$

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\frac{4}{125}+\cdots\cdots\cdots\Rightarrow \quad r=\frac{1}{5}\rightarrow\Rightarrow S=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}}=1$$

S = 1 +1 + 1 + 1 = 4

2º-) En un triángulo rectángulo los catetos están en la relación $\frac{3}{2}$ y la altura divide a la hipotenusa en dos segmentos cuya diferencia es 2 metros. Encuentra la longitud de la hipotenusa.

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l}\frac{c}{b}=\frac{3}{2}\\ b^2+c^2=(2x+2)^2\\ c^2-(x+2)^2=b^2-x^2=h^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}b^2+c^2=(2x+2)^2\\ c^2-b^2=(x+2)^2-x^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$ sumando y restando estas dos ecuaciones:

$c^2 = 2x^2 + 6x + 4$

$b^2 = 2x^2 + 2x$ $\Rightarrow$ elevando al cuadrado (1) $\Rightarrow \frac{c^2}{b^2}=\frac{9}{4} \Rightarrow$

$\frac{2x^2+6x+4}{2x^2+2x}=\frac{9}{4} \Rightarrow$ resolviendo $x=\frac{8}{5}=1{,}6 \Rightarrow$ luego la hipotenusa es

x + x + 2 = 5,2 m