Problemas de la 18ª semana

2º ESO

1º-) Si $x^a \cdot x^b = 1 \;\; y \;\; x \neq \pm 1, \;\; calcular \;\; 4a - b^2 + a^2 + 4b - 10$

Solución:

$$x^a \cdot x^b = 1 \rightarrow x^{a+b} = x^0 \rightarrow a + b = 0$$

$$4a - b^2 + a^2 + 4b - 10 \;\; \rightarrow \;\; 4 \cdot (a+b) + (a+b) \cdot (a-b) - 10 = -10$$

2º-) ¿Cuál es el dígito que ocupa el lugar 1997 en la expresión decimal del número $\frac{1}{13}$?

Solución:

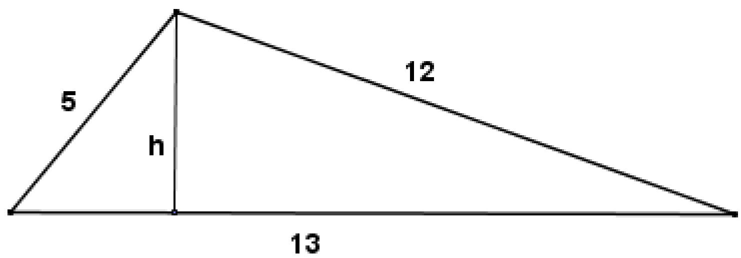
$$\frac{1}{13} = 0{,}076923076923076923076923076923077$$

$La \;\; parte \;\; decimal \;\; que \;\; se \;\; repite \;\; es \;\; 076923$

$Si \;\; dividimos \;\; 1997 \;\; entre \;\; 6 \;\; el \;\; resto \;\; es \;\; 5, \;\; luego \;\; la \, cifra \;\; del \;\; lugar \;\; 1997 \;\; es \;\; 2$

3º-) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm. y 12 cm. Calcular la altura correspondiente a la hipotenusa.

Solución:



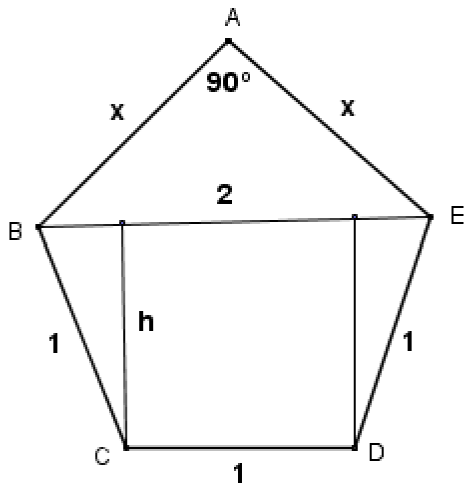
Aplicando Pitágoras hallamos la hipotenusa $h = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

El área del triángulo es: $\frac{cateto \times cateto}{2} = \frac{base \times altura}{2} \rightarrow \frac{5 \times 12}{2} = \frac{13 \times h}{2} \rightarrow h = \frac{60}{13}$

4º ESO

1º-) Sea ABCDE un pentágono. El ángulo $\hat{A}$ mide 90º; AB = AE y ED = DC = CB = 1.
Si BE = 2 y es paralelo a CD, calcular el área del pentágono.

Solución:



El triángulo ABE es rectángulo isósceles $\rightarrow x^2 + x^2 = 4 \rightarrow 2 \cdot x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 2$

Su área es $A_1 = \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

La figura BCDE es un trapecio isósceles. Calculamos su altura $h = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Su área es $A_2 = \dfrac{(2+1)}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ $\rightarrow$ Área total $A_1 + A_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + 1 = \dfrac{3\sqrt{3}+4}{4}$

2º-) Resolver la ecuación $\sqrt{x+10} + \sqrt[4]{x+10} = 12$

Solución:

Hacemos el cambio $x + 10 = y^4 \rightarrow \sqrt{y^4} + \sqrt[4]{y^4} = 12 \rightarrow y^2 + y - 12 = 0$

Re*solviendo la ecuación* $\rightarrow y_1 = 3 \rightarrow y_2 = -4$

$x = 3^4 - 10 = 71 \rightarrow x = (-4)^4 - 10 = 246 \rightarrow$ *no vale esta solución*

3º-) Si $a \neq b$ y $\left(\dfrac{a(1-b)}{b(1-a)}\right)^2 = 1$, *calcular* $\dfrac{a+b}{ab}$

Solución:

Si $\left(\dfrac{a(1-b)}{b(1-a)}\right)^2 = 1 \rightarrow \left(\dfrac{a(1-b)}{b(1-a)}\right) = \pm 1 \rightarrow$ Si $\left(\dfrac{a(1-b)}{b(1-a)}\right) = 1 \rightarrow a - ab = b - ab \rightarrow a = b \rightarrow$ *imposible*

Si $\left(\dfrac{a(1-b)}{b(1-a)}\right) = -1 \rightarrow a - ab = -b + ab \rightarrow a + b = 2ab$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$$

Bachillerato

1º-) Hallar un número n, que no tenga otros factores primos que 2 y 3, y tal que el número de divisores de n^2 sea el triple del número de divisores de n.

Solución:

$Sea\ \ n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$ el número de divisores es $(\alpha+1)\cdot(\beta+1)$

$n^2 = 2^{2\alpha} \cdot 3^{2\beta} \rightarrow$ el número de divisores es $(2\alpha+1)\cdot(2\beta+1)$

Se verifica $(2\alpha+1)\cdot(2\beta+1) = 3\cdot(\alpha+1)\cdot(\beta+1)$

$4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3$

$\alpha\beta = \alpha + \beta + 2 \rightarrow$ despejando α

$$\alpha = \frac{\beta+2}{\beta-1} = 1 + \frac{3}{\beta-1}$$

Si $\beta = 2 \rightarrow \alpha = 4 \rightarrow n = 2^4 \cdot 3^2$

Si $\beta = 4 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow n = 2^2 \cdot 3^4$

2º-) Resolver en R el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=0 \\ x^{1999}-y^{1999}+z^{1999}=2^{2000} \end{array}\right\}$$

Solución:

Despejo x de la primera ecuación $\rightarrow x = -(y+z)$ $\rightarrow$ sustituyo en la segunda ecuación

$-(y+z)^3 + y^3 + z^3 = 0 \rightarrow$ opero $\rightarrow -y^3 - 3y^2z - 3yz^2 - z^3 + y^3 + z^3 = 0$

simplifico y saco factor común $\rightarrow -3yz(y+z) = 0 \rightarrow$ *se pueden presentar tres casos*

$1^{o}) \rightarrow y = 0 \rightarrow z \neq 0 \rightarrow x = -z$

Sustituyo en la 3^{a} *ecuación* $\rightarrow -z^{1999} + z^{1999} = 2^{2000} \rightarrow 0 = 2^{2000} \rightarrow$ *imposible*

$2^{o}) \rightarrow z = 0 \rightarrow y \neq 0 \rightarrow x = -y \rightarrow$ *Sustituyo en la* 3^{a} *ecuación*

$-y^{1999} - y^{1999} = 2^{2000} \rightarrow -2y^{1999} = 2^{2000} \rightarrow -y^{1999} = 2^{1999} \rightarrow y = -2$

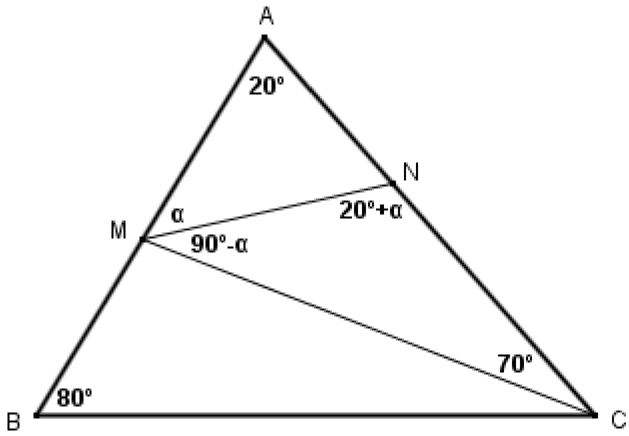
luego $\rightarrow z = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow x = 2$

$3^{o}) \rightarrow y + z = 0 \rightarrow y = -z \rightarrow x = 0 \rightarrow$ *Sustituyo en la* 3^{a} *ecuación*

queda igual que el 2^{o} *caso*

3º-) Sea un triángulo isósceles ABC tal que AB = AC y el ángulo $\hat{A} = 20^{o}$. Sea M el pie de la altura desde C y sea N un punto del lado AC tal que $CN = \frac{1}{2}BC$. Calcular el ángulo $A\hat{M}N$.

Solución:



$$Sea\ \ AB = a \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 80º \rightarrow BC = 2a\cos 80º \rightarrow Sea\ \ A\hat{M}N = \alpha$$

$$MC = 2a\cos 80º\, sen 80º \rightarrow CN = \frac{1}{2}BC = a\cos 80º$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo MNC

$$\frac{CN}{sen(90º - \alpha)} = \frac{MC}{sen(20º + \alpha)} \rightarrow \frac{a\cos 80º}{\cos\alpha} = \frac{2a\cos 80º\, sen 80º}{sen(20º + \alpha)} \rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{2 sen 80º}{sen(20º + \alpha)} \rightarrow$$

$$sen(20º + \alpha) = 2\cos\alpha\, sen 80º \rightarrow sen 20º \cos\alpha + sen\alpha \cos 20º = 2\cos\alpha\, sen 80º \rightarrow divi\dim os\ \ \text{por}\ \ \cos\alpha$$

$$sen 20º + tag\alpha \cos 20º = 2 sen 80º \rightarrow tag\alpha = \frac{2 sen 80º - sen 20º}{\cos 20º} = \frac{2 sen(60º + 20º) - sen 20º}{\cos 20º} =$$

$$\frac{2(sen 60º \cos 20º + sen 20º \cos 60º) - sen 20º}{\cos 20º} = \frac{\sqrt{3}\cos 20º}{\cos 20º} = \sqrt{3}$$

$$tag\alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60º$$