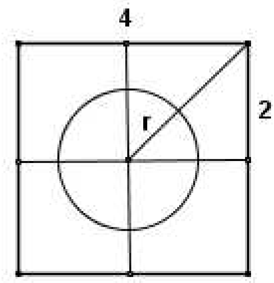
Problemas de la 17ª semana

2º ESO

1º-) Un cuadrado de área 16 cm^2 es dividido en 4 cuadrados más pequeños iguales. ¿Cuál es el área del círculo que pasa por los centros de los 4 cuadrados más pequeños?

Solución:



Área = lado^2 $\rightarrow$ $lado = \sqrt{16} = 4$ $\rightarrow$ lado del cuadrado pequeño $\rightarrow$ $\frac{4}{2} = 2$

Radio del círculo $\rightarrow$ $r = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}$ $\rightarrow$ Área del círculo $\rightarrow$ $A = \pi \cdot r^2 = \pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot \pi$

2º-) Calcular dos números tales que su diferencia, su suma y su producto estén en la relación 1:7:24

Solución:

Sean a y b los números $\rightarrow$ $\frac{a-b}{1} = \frac{a+b}{7} = \frac{a \cdot b}{24}$ $\rightarrow$ Aplicando las propiedades de las proporciones $\rightarrow$ $\frac{a-b}{1} = \frac{a+b}{7} = \frac{a \cdot b}{24} = \frac{2a}{8} = \frac{-2b}{-6}$

$$\left\{\begin{array}{l} a \cdot b = \frac{48 \cdot a}{8} \rightarrow b = 6 \\ 6 \cdot a \cdot b = 48 \cdot b \rightarrow a = 8 \end{array}\right\}$$

3º-) Calcular los divisores positivos de 2002

Solución:

$2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

Divisores $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \\ 13 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 11 \\ 2 \cdot 13 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7 \cdot 11 \\ 7 \cdot 13 \end{array}\right\} \rightarrow \{11 \cdot 13\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \cdot 7 \cdot 11 \\ 2 \cdot 7 \cdot 13 \\ 2 \cdot 11 \cdot 13 \end{array}\right\} \rightarrow \{7 \cdot 11 \cdot 13\} \rightarrow \{2002\}$

4º ESO

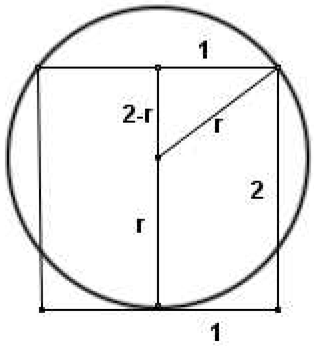
1º-) Comenzando con 1, todos los números naturales son escritos sucesivamente: 12345678910111213141516……………,¿qué dígito aparece en la posición 2001?

Solución:

Los nueve primeros números ocupan 9 dígitos. Del número 10 al 99 hay 90 números, luego 90·2 = 180 dígitos, por tanto 9 + 180 = 189 dígitos. A partir del dígito 189 los números son de 3 cifras, luego $\frac{2001-189}{3}=604$. Hay que colocar 604 números a partir del 100, luego el último es 703, por tanto el dígito que está en la posición 2001 es el 3.

2º-) Un círculo pasa por dos vértices consecutivos de un cuadrado y es tangente al lado opuesto del cuadrado. Si el lado del cuadrado mide 2 cm., ¿cuál es el radio del círculo?

Solución:



$$(2-r)^2+1^2=r^2 \rightarrow 4+r^2-4r+1=r^2 \rightarrow 4r=5 \rightarrow r=\frac{5}{4}=1{,}25$$

3º-) Sea la sucesión $a_0=1$; $a_1=3$; $a_2=7$; $a_{n+3}=3\cdot(a_{n+2}-a_{n+1})+a_n$ *para* $n\geq 0$.
Calcular la fórmula de a_n, expresada como un polinomio en términos de n.

Solución:

$$a_0=1 \longrightarrow 1$$

$$a_1=3 \longrightarrow 1+2$$

$$a_2=7 \longrightarrow 1+2+4$$

$$a_3=3(7-3)+1=13 \longrightarrow 1+2+4+6$$

$$a_4=3(13-7)+3=21 \longrightarrow 1+2+4+6+8$$

$$a_n=1+\underbrace{2+4+6+8+10+\ldots\ldots\ldots+2n}_{n}$$

$$a_n=1+\frac{2+2n}{2}\cdot n=1+\frac{2n+2n^2}{2}=n^2+n+1$$

Bachillerato

1º-) Resolver la ecuación $4^x - 9^y = 55$ en el conjunto de los números enteros positivos.

Solución:

$$4^x - 9^y = 55 \rightarrow \left(2^x\right)^2 - \left(3^y\right)^2 = 55 \rightarrow \left(2^x - 3^y\right)\cdot\left(2^x + 3^y\right) = 55 \rightarrow \text{esto implica que}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x - 3^y = 5 \ \text{ y } \ 2^x + 3^y = 11 \\ \text{o bien} \\ 2^x - 3^y = 1 \ \text{ y } \ 2^x + 3^y = 55 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,\textit{solviendo el primer caso} \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 3^y = 3 \\ x = 3 \rightarrow y = 1 \\ \mathrm{Re}\,\textit{solviendo el}\ \text{segundo}\ \textit{caso} \rightarrow 2^x = 28 \rightarrow 3^y = 27 \\ \textit{No hay un valor entero para } x \end{array}\right\}$$

2º-) Sea la ecuación: $x^2 - 2\cdot(m + 1)\cdot x + 3m + 2 = 0$

a) Estudiar el signo y existencia de las raíces reales de esta ecuación para cada valor del parámetro m

b) Establecer que las raíces x_1 y x_2 de esta ecuación están ligadas por una relación independiente de m.

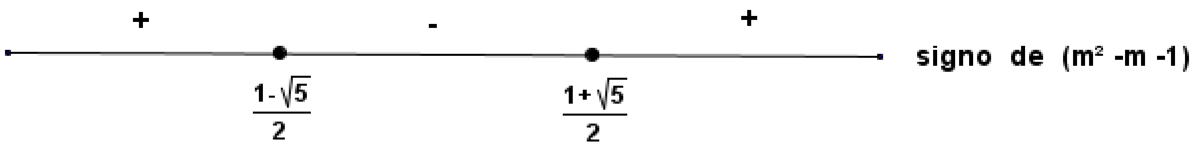
c) Deducir de esta relación los valores de las raíces cuando éstas son iguales.

Solución:

a) Resolvemos la ecuación $x = \dfrac{2(m+1) \pm \sqrt{4(m+1)^2 - 4(3m+2)}}{2} =$

$$\frac{2(m+1) \pm \sqrt{4m^2 + 8m + 4 - 12m - 8}}{2} = \frac{2(m+1) \pm 2\sqrt{m^2 - m - 1}}{2} = (m+1) \pm \sqrt{m^2 - m - 1}$$

$$m^2 - m - 1 = 0 \rightarrow \mathrm{Re}\,\textit{solviendo} \rightarrow m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ y } \ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$



Discutimos las raíces

a-1) Si $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow$ no hay raíces reales

a-2) Si $\left\{\begin{array}{l} m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = m + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = x_1 = x_2 \\ m = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = m + 1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = x_1 = x_2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textit{las}\ \text{dos raíces} \\ \text{son iguales y} \\ \text{positivas} \end{array}\right\}$

a-3) Si $\left\{\begin{array}{l} m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow x_1 \ \text{ y } \ x_2 \ \text{ son positivas} \\ \mathrm{m} < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow x_1 \ \text{ es positiva y } \ \mathrm{x}_2 \ \text{ es negativa} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 3m+2 \end{cases}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2m+2 \rightarrow m = \dfrac{x_1 + x_2 - 2}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = 3\left(\dfrac{x_1 + x_2 - 2}{2}\right) + 2 \end{array}\right\}$

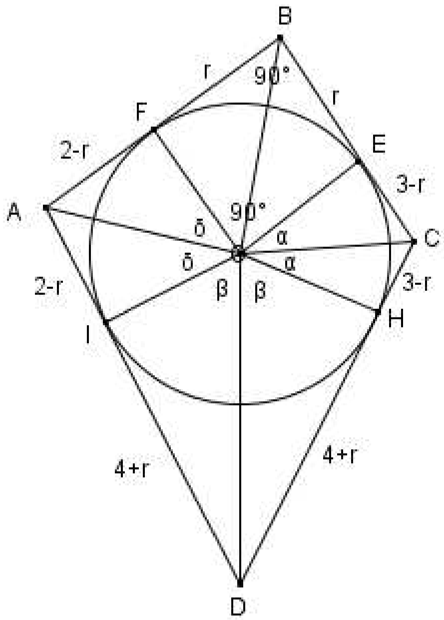
$x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{3x_1 + 3x_2 - 6}{2}\right) + 2 \rightarrow 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 6 + 4$

$2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 2$

c) $\left\{\begin{array}{l} Si\ \ x_1 = x_2 \rightarrow 2 \cdot x_1^2 = 6x_1 - 2 \rightarrow x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \\ x_1 = x_2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right\}$

3º-) Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que AB = 2 ; BC = 3 ; CD = 7 y AD = 6. Inscribimos un círculo. Si el ángulo $\hat{B} = 90^{o}$, calcular el radio del círculo.

Solución:



Sea r el radio del círculo $\rightarrow$ OFBE es un cuadrado de lado r.

$\left.\begin{cases} EC = 3 - r \rightarrow CH = 3 - r \rightarrow HD = 4 + r \\ DI = 4 + r \rightarrow IA = 2 - r \rightarrow AF = 2 - r \end{cases}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} Los\ triángulos\ \ OEC \text{ y OHC son semejantes} \\ Los\ triángulos\ \ OHD \text{ y OID son semejantes} \\ Los\ triángulos\ \ OIA \text{ y OAF son semejantes} \end{array}\right\}$

La suma de los ángulos alrededor de O es 360º: $90^{o} + 2\alpha + 2\beta + 2\delta = 360^{o} \rightarrow$

$\alpha + \beta = 135^{o} - \delta \rightarrow tg(\alpha + \beta) = tg(135^{o} - \delta) \rightarrow \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \dfrac{tg135^{o} - tg\delta}{1 + tg135^{o} \cdot tg\delta}$

$$\left.\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{3-r}{r} \\ tg\beta = \dfrac{4+r}{r} \\ tg\delta = \dfrac{2-r}{r} \end{cases}\right\} \rightarrow sustituyendo \rightarrow \frac{\dfrac{3-r}{r}+\dfrac{4+r}{r}}{1-\dfrac{3-r}{r}\cdot\dfrac{4+r}{r}} = \frac{-1-\dfrac{2-r}{r}}{1-\dfrac{2-r}{r}}$$

Haciendo operaciones en la ecuación anterior $\rightarrow$ $3r^2 - 2r - 4 = 0 \rightarrow r = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$