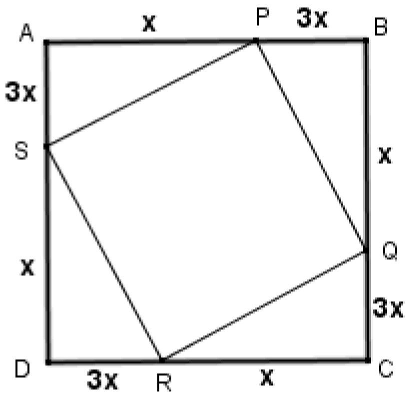
Problemas de la 16ª semana

2º ESO

1º-) En el cuadrado ABCD los puntos P, Q, R y S están en los lados AB, BC, CD y DA respectivamente de tal forma que $\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=\frac{1}{3}$. Calcula el cociente entre las áreas de PQRS y ABCD.

Solución:



$$\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=\frac{1}{3} \rightarrow \begin{Bmatrix} PB=3\cdot AP \\ QC=3\cdot BQ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} cuadrado\ \ ABCD\ \ \text{Área}=(4x)^2=16x^2 \\ cuadrado\ \ PQRS\ \rightarrow Área=lado^2=(3x)^2+x^2=10x^2 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{10x^2}{16x^2}=\frac{5}{8}$$

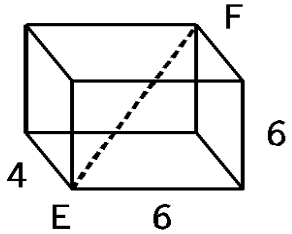
2º-) Un reloj se atrasa $\frac{3}{4}$ de hora al día. Si se pone a las 12 en la hora exacta, ¿qué hora será cuando marque las $4\frac{1}{2}$ de la tarde?

Solución:

$$\begin{Bmatrix} 24\ \ horas \xrightarrow{atrasa} 45\ \ \min utos \\ 16{,}5\, horas \xrightarrow{atrasa} x \end{Bmatrix} \rightarrow x=\frac{16{,}5\cdot 45}{24}=30{,}9375\ \ \min utos$$

La hora será las 5,9375 de la tarde

3º-) Calcular EF



Solución:
Aplicamos el teorema de Pitágoras

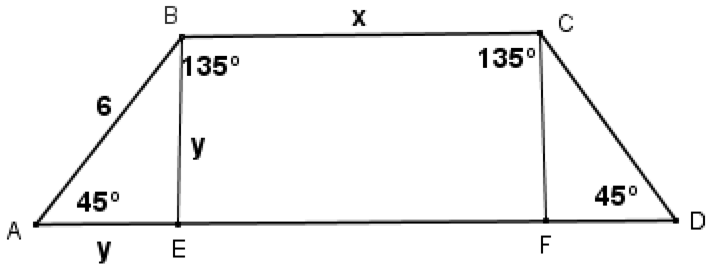
$$\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}$$

$$EF=\sqrt{\left(\sqrt{52}\right)^2+6^2}=\sqrt{52+36}=\sqrt{88}=2\sqrt{22}$$

4º ESO

1º-) Sea ABCD un trapecio. AD y BC son las bases. Los ángulos son $\hat{A}=\hat{D}=45^\circ$ y $\hat{B}=\hat{C}=135^\circ$. Si AB = 6 y el área del trapecio es 30, calcula BC.

Solución:



El triángulo ABE es rectángulo isósceles $\rightarrow\ y^2+y^2=6^2$

$$2y^2=36\rightarrow y^2=18\rightarrow y=\sqrt{18}\rightarrow y=3\sqrt{2}=altura$$

$$AD=x+2y=x+2\cdot 3\sqrt{2}=x+6\sqrt{2}\ \rightarrow$$

$$\acute{A}rea\ \ del\ \ trapecio=Tri\acute{a}ngulo\ \ AEB+\text{rectángulo BCFE}+Tri\acute{a}ngulo\ \ CFD$$

$$30=\frac{\sqrt{18}\sqrt{18}}{2}+\sqrt{18}\cdot x+\frac{\sqrt{18}\sqrt{18}}{2}\ \rightarrow\ 30=9+\sqrt{18}\cdot x+9\ \rightarrow\ \text{x}=\frac{12}{\sqrt{18}}=\frac{12\sqrt{18}}{18}=\frac{12\cdot 3\sqrt{2}}{18}=2\sqrt{2}$$

2º-) Para cualquier número real x, la función f(x) satisface: 2·f(x) + f(1 – x) = x^2. Calcular f(5).

Solución:

$$\left.\begin{cases} Si\ \ x=5\rightarrow 2\cdot f(5)+f(-4)=25 \\ Si\ \ x=-4\rightarrow 2\cdot f(-4)+f(5)=16\end{cases}\right\}\rightarrow \text{Re}solviendo\rightarrow f(5)=\frac{34}{3}$$

3º-) En la ecuación $k^2x-x(3x+3k)+6=0$, la suma de las raíces excede al producto de las raíces en 8. Calcular los valores de k.

Solución:

$$Ecuaci\acute{o}n\rightarrow k^2x-3x^2-3kx+6=0\rightarrow -3x^2+\left(k^2-3k\right)x+6=0$$

$$3x^2+\left(3k-k^2\right)x-6=0\rightarrow Sean\ \ a\ \ y\ \ b\ \ las\ \ ra\acute{i}ces\rightarrow Aplicando\ \ Cardano$$

$$\left.\begin{cases} a+b=\dfrac{-\left(3k-k^2\right)}{3} \\ ab=\dfrac{-6}{3}\end{cases}\right\}\rightarrow\frac{k^2-3k}{3}=-2+8\rightarrow k^2-3k-18=0\rightarrow\left\{\begin{matrix} k=6 \\ k=-2\end{matrix}\right\}$$

Bachillerato

1º-) Demostrar que cualquiera que sea el número natural n > 0, la expresión:

$7^{2n+1} - 48^n - 7$ es divisible por 48.

Solución:

Vamos a hacerlo por inducción:

Para n = 1 $\rightarrow$ $7^3 - 48 - 7 = 288 = \textit{múltiplo de } 48$

Para n = 2 $\rightarrow$ $7^8 - 48^2 - 7 = 14.496 = \textit{múltiplo de } 48$

Supongamos que es cierto para n, vamos a demostrar que es cierto para (n + 1)

Para (n + 1) $\rightarrow$ $7^{2(n+1)+1} - 48^{n+1} - 7 = 4\dot{8}$

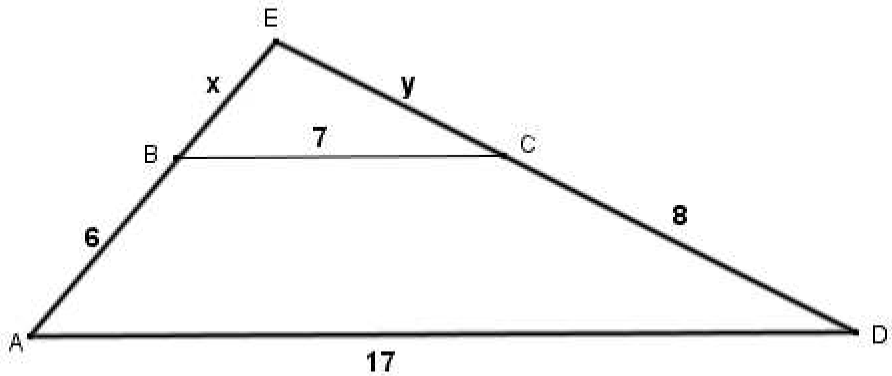
$$7^{2n+3} - 48^n \cdot 48 - 7 = 7^{2n+1} \cdot 7^2 - 48^n \left(7^2 - 1\right) - 7 = 7^{2n+1} \cdot 7^2 - 48^n \cdot 7^2 + 48^n - 7 =$$

$$7^2 \left(7^{2n+1} - 48^n\right) + 48^n - 7 = 7^2 \left(7^{2n+1} - 48^n - 7 + 7\right) + 48^n - 7 =$$

$$7^2 \left(\underbrace{7^{2n+1} - 48^n - 7}_{\textit{múltiplo de } 48} \right) + 48^n \underbrace{- 7 + 7^3}_{4\dot{8}} = 49 \cdot 4\dot{8} + 4\dot{8} + \underbrace{- 7 + 7^3}_{4\dot{8}} = 4\dot{8} \quad c.q.d.$$

2º-) Sea ABCD un trapecio. AD y BC son las bases. AB = 6, BC = 7, CD = 8 y AD = 17. Prolongamos los lados AB y CD hasta que se encuentran en el punto E. Calcular el ángulo E.

Solución:



Los triángulos BEC y AED son semejantes $\rightarrow$ $\dfrac{x}{x+6} = \dfrac{y}{y+8} = \dfrac{7}{17}$

$$\begin{Bmatrix} 17x = 7x + 42 \rightarrow x = 4{,}2 \\ 17y = 7y + 56 \rightarrow y = 5{,}6 \end{Bmatrix}$$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo BEC

$$7^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos \hat{E} \ \rightarrow \ \cos \hat{E} = \frac{x^2 + y^2 - 49}{2xy} = \frac{17{,}64 + 31{,}36 - 49}{2xy} = 0$$

$$Si \ \cos \hat{E} = 0 \ \rightarrow \ \hat{E} = 90º$$

3º-) En el triángulo de Pascal, ¿en qué fila tres términos consecutivos están en la relación 3:4:5?
Solución:
Vamos a considerar la fila m

$$\frac{\binom{m}{n}}{3}=\frac{\binom{m}{n+1}}{4}=\frac{\binom{m}{n+2}}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{m!}{n!(m-n)!}}{3}=\frac{\frac{m!}{(n+1)!\cdot(m-n-1)!}}{4}=\frac{\frac{m!}{(n+2)!\cdot(m-n-2)!}}{5}$$

$$\frac{1}{3\cdot n!\cdot(m-n)(m-n-1)(m-n-2)!}=\frac{1}{4\cdot(n+1)n!(m-n-1)(m-n-2)!}=\frac{1}{5(n+2)(n+1)n!(m-n-2)!}$$

$$\frac{1}{3(m-n)(m-n-1)}=\frac{1}{4(n+1)(m-n-1)}=\frac{1}{5(n+2)(n+1)}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3(m-n)}=\frac{1}{4(n+1)}\\ \frac{1}{4(m-n-1)}=\frac{1}{5(n+2)}\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}4n+4=3m-3n\\ 5n+10=4m-4n-4\end{array}\right\} \rightarrow \mathrm{Re}\,solviendo \rightarrow m=62$$