Problemas de la 15ª semana

2º ESO

1º-) El m.c.d. de dos números es 4 y el m.c.m. es 24. ¿Cuánto puede valer la suma de los dos números?

Solución: Los números son: a y b

$$a \cdot b = m.c.d. \times m.c.m. = 4 \cdot 24 = 96$$

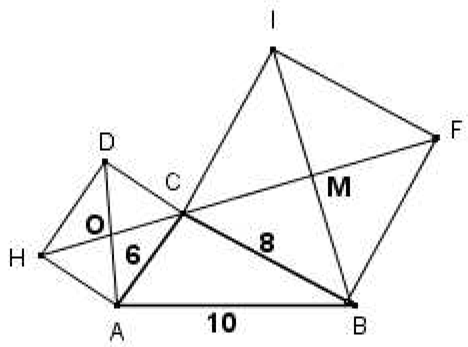
$$Como\ 4\ \text{es}\ el\ m.c.d \rightarrow \begin{Bmatrix} a = 4 \cdot k \rightarrow k \in N \\ b = 4 \cdot k' \rightarrow k' \in N \end{Bmatrix} \rightarrow 96 = 16 \cdot k \cdot k' \rightarrow k \cdot k' = 6 \rightarrow \begin{Bmatrix} k = 1 \text{ y } k' = 6 \\ k = 2 \text{ y } k' = 3 \end{Bmatrix}$$

$$Si \rightarrow k = 1 \text{ y } k' = 6 \rightarrow a = 4 \text{ y } b = 24 \rightarrow a + b = 28$$

$$Si \rightarrow k = 2 \text{ y } k' = 3 \rightarrow a = 8 \text{ y } b = 12 \rightarrow a + b = 20$$

2º-) Sea un triángulo ABC de lados AC = 6, BC = 8 y AB = 10. Dibujamos los cuadrados exteriores al triángulo ACXY y BCWZ. Calcular la distancia entre los centros de los dos cuadrados.

Solución:



ABC es un triángulo rectángulo $\rightarrow$ $10^2 = 8^2 + 6^2$

$$HC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \rightarrow \frac{HC}{2} = 3\sqrt{2} = OC$$

$$CF = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \rightarrow \frac{CF}{2} = 4\sqrt{2} = CM$$

$$OM = OC + CM = 7\sqrt{2}$$

3º-) Calcula tres números impares consecutivos, tales que tres veces el primero más cuatro veces el segundo excede en 26 a cinco veces el último.

Solución:

$$Los\ números\ son: 2n-1,\ 2n+1,\ 2n+3$$

$$3(2n-1) + 4(2n+1) = 5(2n+3) + 26$$

$$\text{Re}\,solviendo \rightarrow n = 10$$

$$Los\ números\ son\ 19,\ 21,\ 23$$

4º ESO

1º-) Ordenar de menor a mayor los números: 2^{250}, 3^{200} y 5^{150}

Solución:

$$\left\{ 2^{250} = \left(2^{\frac{5}{2}} \right)^{100} = \left(\sqrt{2^5} \right)^{100} = \left(4\sqrt{2} \right)^{100} \right\}$$

$$\left\{ 3^{200} = \left(3^2 \right)^{100} = 9^{100} \right\}$$

$$\left\{ 5^{150} = \left(5^{\frac{3}{2}} \right)^{100} = \left(\sqrt{5^3} \right)^{100} = \left(5\sqrt{5} \right)^{100} \right\}$$

$$2^{250} < 3^{200} < 5^{150}$$

2º-) Si $\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} = 3,\ \ calcular\ \left(a - \dfrac{1}{a} \right)$

Solución:

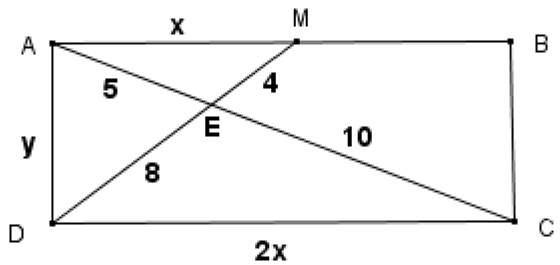
Considerando que $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 \ \rightarrow\ \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$$

$$\left(a - \frac{1}{a} \right) = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = 3\sqrt{5}$$

3º-) Sea ABCD un rectángulo. M es el punto medio de AB y E el punto donde se cortan la diagonal AC y la recta DM. Si EC = 10 y EM = 4, calcular el área del rectángulo.

Solución:



Llamando: AM = x → DC = 2x → AD = y

Los triángulos AME y DEC son semejantes, luego AE = 5 y DE = 8

Aplicando Pitágoras $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 12^2 \\ y^2 + (2x)^2 = 15^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{13} \end{array} \right\} \rightarrow Área = 2x \cdot y = 18\sqrt{39}$

Bachillerato

1º-) Resolver la ecuación $\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{15+x}=3$

Solución:

$$\textit{Hacemos el cambio}\quad 2-x=y^4 \;\rightarrow\; y+\sqrt[4]{15+2-y^4}=3 \;\rightarrow\; \sqrt[4]{17-y^4}=3-y$$

$$\textit{Elevamos a la } 4^{a} \rightarrow 17-y^4=(3-y)^4 \rightarrow 17-y^4=81-4\cdot 27y+54y^2-12y^3+y^4$$

$$2y^4-12y^3+54y^2-108y+64=0 \rightarrow y^4-6y^3+27y^2-54y+32=0$$

$$\text{Re}\,\textit{solviendo por Ruffini}\quad y=1 \rightarrow y=2$$

$$2-x=1 \rightarrow x=1$$

$$2-x=16 \rightarrow x=-14$$

2º-) Encontrar todos los pares (x,y) de enteros positivos que verifican la ecuación $x=\dfrac{6-x}{y^2-x}$

Solución:

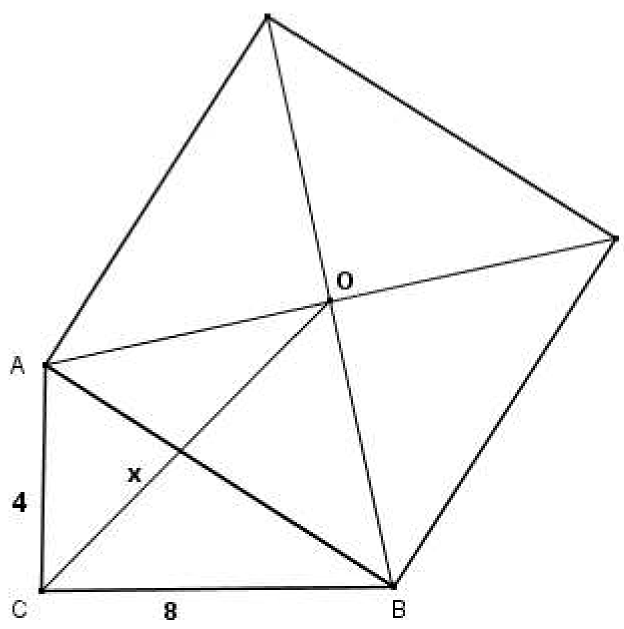
$$x\left(y^2-x\right)=6-x \;\rightarrow\; y^2=\frac{6-x+x^2}{x} \;\rightarrow\; y=\sqrt{\frac{x^2-x+6}{x}}=\sqrt{x-1+\frac{6}{x}}$$

$$Si\quad x=2 \rightarrow y=2 \rightarrow (2,2)$$

$$Si\quad x=3 \rightarrow y=2 \rightarrow (3,2)$$

3º-) Sea ABC un triángulo rectángulo de catetos AC = 4 y BC = 8. Dibujamos un cuadrado exterior al triángulo con AB como uno de sus lados. Calcular la distancia de C al centro del cuadrado.

Solución:



Hallamos AB $\rightarrow$ $AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Hallamos la diagonal del cuadrado $\rightarrow$ $D = \sqrt{80+80} = 4\sqrt{10} \rightarrow \frac{\mathrm{D}}{2} = AO = BO = 2\sqrt{10}$

Los ángulos C y O miden 90º, luego los ángulos CAO y CBO suman 180º.
Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos CAO y CBO:

$x^2 = 16 + 40 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{40} \cdot \cos C\hat{A}O$

$x^2 = 64 + 40 + 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{40} \cdot \cos C\hat{B}O$

Multiplicando la 1ª ecuación por 2 y sumándola con la 2ª:

$3x^2 = 216 \rightarrow x^2 = 72 \rightarrow x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$