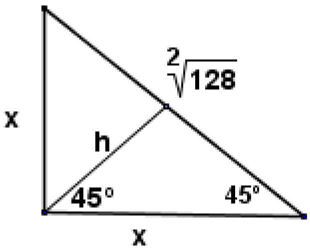
Problemas de la 10ª semana

2º ESO

1º-) La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide $\sqrt{128}$. Calcular los catetos, el área y la altura sobre la hipotenusa.

Solución:



Según la figura: $x^2 + x^2 = \left(\sqrt{128}\right)^2 \rightarrow 2x^2 = 128 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = 8$

$$\text{Área} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{64}{2} = 32 \quad \rightarrow \quad altura = h = \frac{\sqrt{128}}{2} = \sqrt{\frac{128}{4}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

2º-) Tengo en el bolsillo 25 monedas. Todas son de 0,50 € o de 0,20 €. En total tengo 8 €. ¿Cuántas monedas tengo de cada1 clase?

Solución:

Hay x monedas de 0,5 euros; $(25 - x)$ *monedas de 0,2 euros*

$$0{,}5x + (25 - x) \cdot 0{,}2 = 8 \rightarrow 0{,}5x + 5 - 0{,}2x = 8 \rightarrow x = 10$$

10 monedas de 0,5 euros y 15 monedas de 0,2 euros

3º-) Coloca las cifras del 0 al 9, cada una en una casilla, para que los cuatro números resultantes formen una proporción.

$$\frac{\square}{\square\;\square} \;\square\; \frac{\square\;\square\;\square}{\square\;\square\;\square\;\square}$$

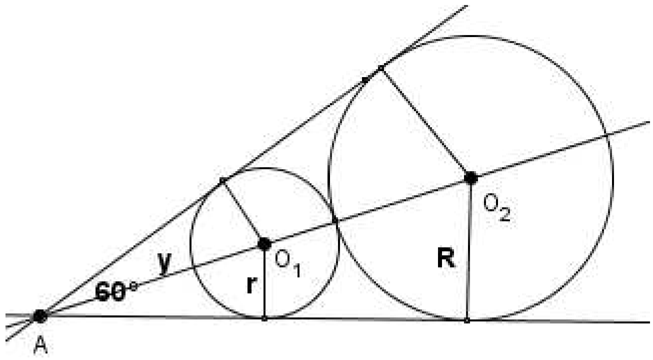
Solución:

$$\frac{5}{30} = \frac{697}{4182}$$

4º ESO

1º-) Dos círculos tangentes exteriormente están inscritos en un ángulo de 60º. El radio del círculo más pequeño es r. Calcular el radio del círculo grande.

Solución:



$$y \cdot sen30º = r \rightarrow y = 2r = AO_1$$
$$AO_2 = 2R \;\rightarrow\; 2R = R + r + 2r \;\rightarrow\; R = 3r$$

2º-) Determina la suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre los términos 2º y 1º es 6 y la diferencia entre los términos 4º y 3º es 54.

Solución:

$$\left.\begin{cases} a_2 - a_1 = 6 \\ a_4 - a_3 = 54 \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} a_1 \cdot r - a_1 = 6 \\ a_1 \cdot r^3 - a_1 \cdot r^2 = 54 \end{cases}\right\} \rightarrow a_1 = \frac{6}{r-1}$$

$$a_1 \cdot r^2 (r-1) = 54 \rightarrow \frac{6}{r-1} \cdot r^2 (r-1) = 54 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3 \rightarrow a_1 = 3$$

$$Los\ tres\ primeros\ términos\ son \rightarrow 3,9,27 \rightarrow\rightarrow S = 39$$

3º-) Determina A y B para que el polinomio $Ax^4 + Bx^3 + 1$ sea divisible por $x^2 - 2x + 1$

Solución:

$$\begin{array}{l|l}
Ax^4 + Bx^3 + \qquad\qquad 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-Ax^4 + 2Ax^3 - Ax^2} & Ax^2 + (2A+B)x + (3A+2B) \\
\qquad (2A+B)x^3 - Ax^2 + 1 & \\
\qquad\qquad \underline{(4A+2B)x^2 - (2A+B)x} & \\
\qquad\qquad (3A+2B)x^2 - (2A+B)x + 1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{(6A+4B)x - (3A+2B)} & \\
\qquad\qquad\qquad (4A+3B)x + (1-3A-2B) &
\end{array}$$

$$\left.\begin{cases} 4A + 3B = 0 \\ 1 - 3A - 2B = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow \text{Re}\,solviendo \rightarrow A = 3 \rightarrow B = -4$$

Bachillerato

1º-) Resolver en Z la ecuación 98y – 199x = 68

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}
Despejamos\ y \ \rightarrow\ y=\dfrac{199x+68}{98}=2x+\dfrac{3x+68}{98}\\
Hacemos\ el\ cambio\ \dfrac{3x+68}{98}=t\ \rightarrow t\in Z\rightarrow x=\dfrac{98t-68}{3}=32t+\dfrac{2t}{3}-22-\dfrac{2}{3}=32t-22+\dfrac{2t-2}{3}\\
Hacemos\ el\ cambio\ \dfrac{2t-2}{3}=2h\rightarrow h\in Z\rightarrow t=3h+1\\
x=32\cdot(3h+1)-22+2h=98h+10\\
y=2x+t=2(98h+10)+3h+1=199h+21\\
Comprobación\rightarrow h=0\rightarrow x=10\rightarrow y=21\rightarrow 98\cdot 21-199\cdot 10=2058-1990=68\\
h=1\rightarrow x=108\rightarrow y=220\rightarrow 98\cdot 220-199\cdot 108=21560-21492=68\\
h=2\rightarrow x=206\rightarrow y=419\rightarrow 98\cdot 419-199\cdot 206=41062-40994=68
\end{array}\right\}$$

2º-) Demostrar que si el número abc es divisible por 21, también lo es a – 2b + 4c.

Solución:

Si abc es divisible por 21 se verifica: $c+10b+100a=21\cdot k\rightarrow k\in N$

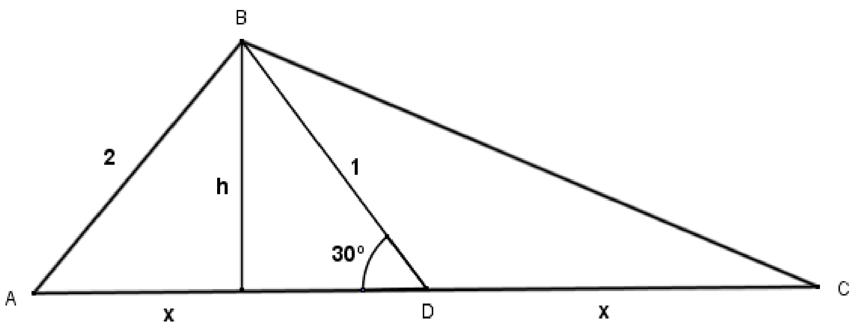
Vamos a ver que

$a-2b+4c=21\cdot k'\rightarrow k'\in N$

$a-2b+4(21k-10b-100a)=-399a-42b+4\cdot 21k=21\cdot(-19a-2b+4k)=21k'\ c.q.d.$

3º-) En el triángulo ABC, AB = 2, BD es una mediana, BD = 1, el ángulo BDA = 30º. Calcular el área del triángulo ABC.

Solución:



Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABD $\rightarrow\ 4=x^2+1-2x\cos 30º$

$4=x^2+1-2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow x^2-\sqrt{3}x-3=0\rightarrow resolviendo\rightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$

$Base=2x=\sqrt{3}+\sqrt{15}\rightarrow altura=1\cdot sen30º=\dfrac{1}{2}\rightarrow Área=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)\cdot\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$