VI Seminario sobre Actividades para Estimular el Talento Precoz en Matemáticas.

Una sesión de 2º Estalmat-Galicia:

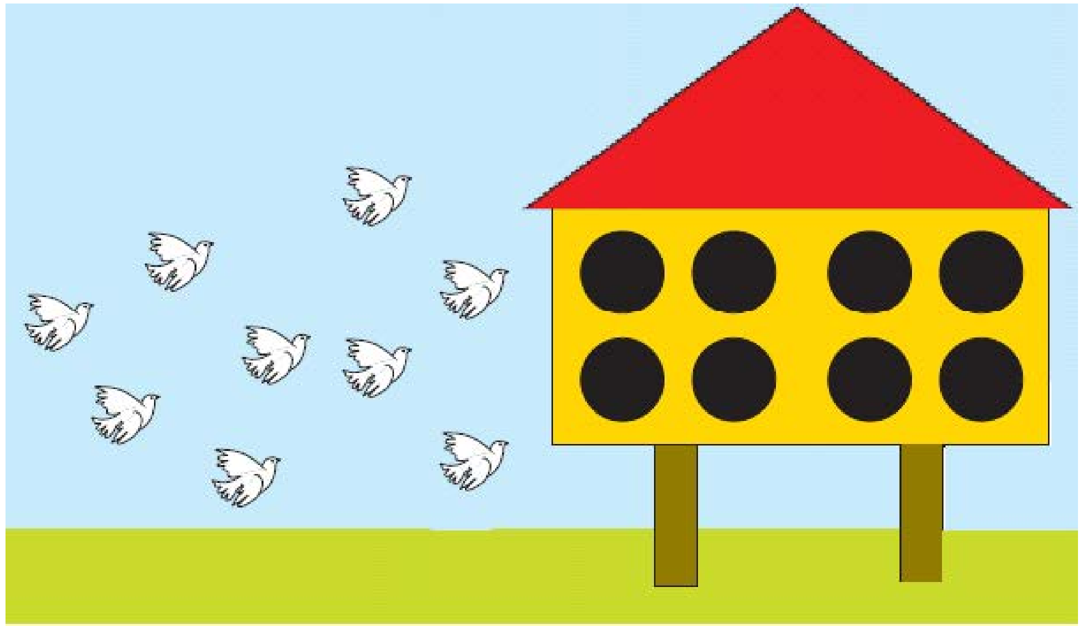
Principio del palomar (II)

Tensegridad

Castillo de la Mota
Medina del Campo
22/04/2013

Alicia Pedreira Mengotti
Covadonga Rodríguez-Moldes

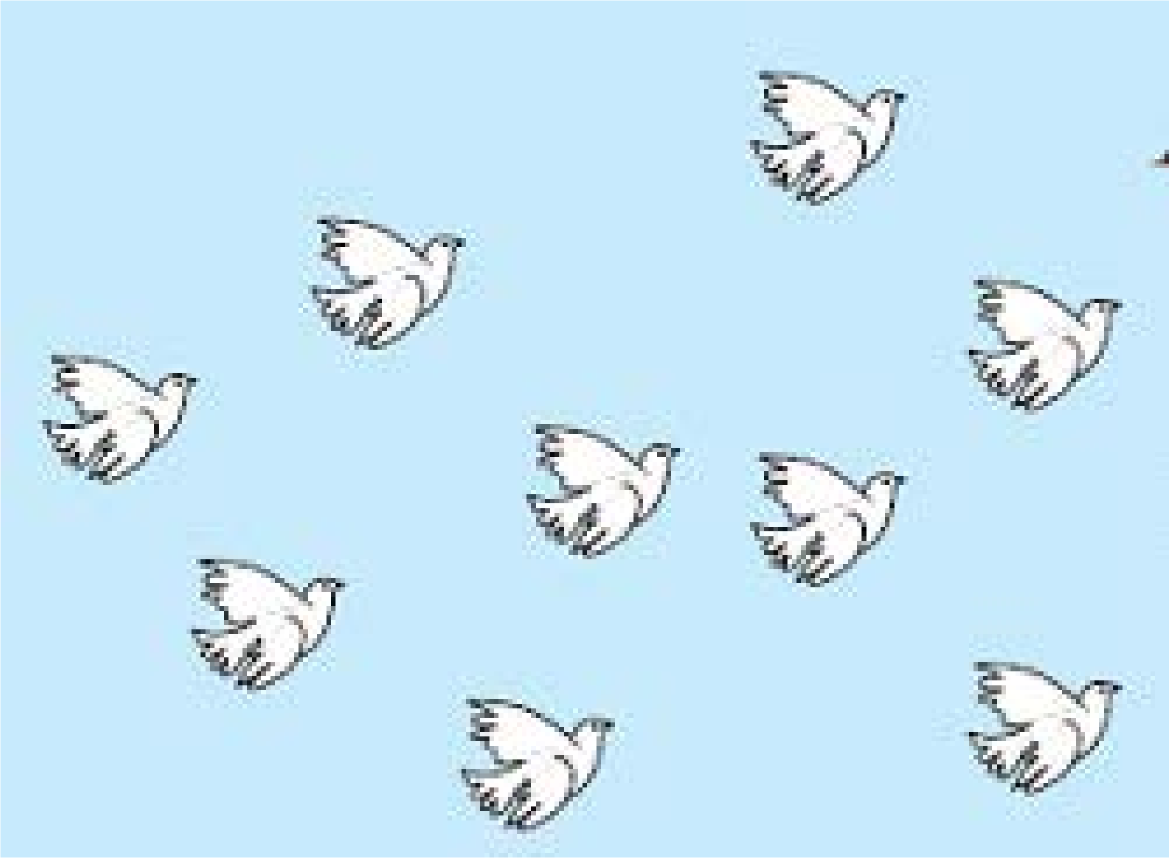
Principio del palomar



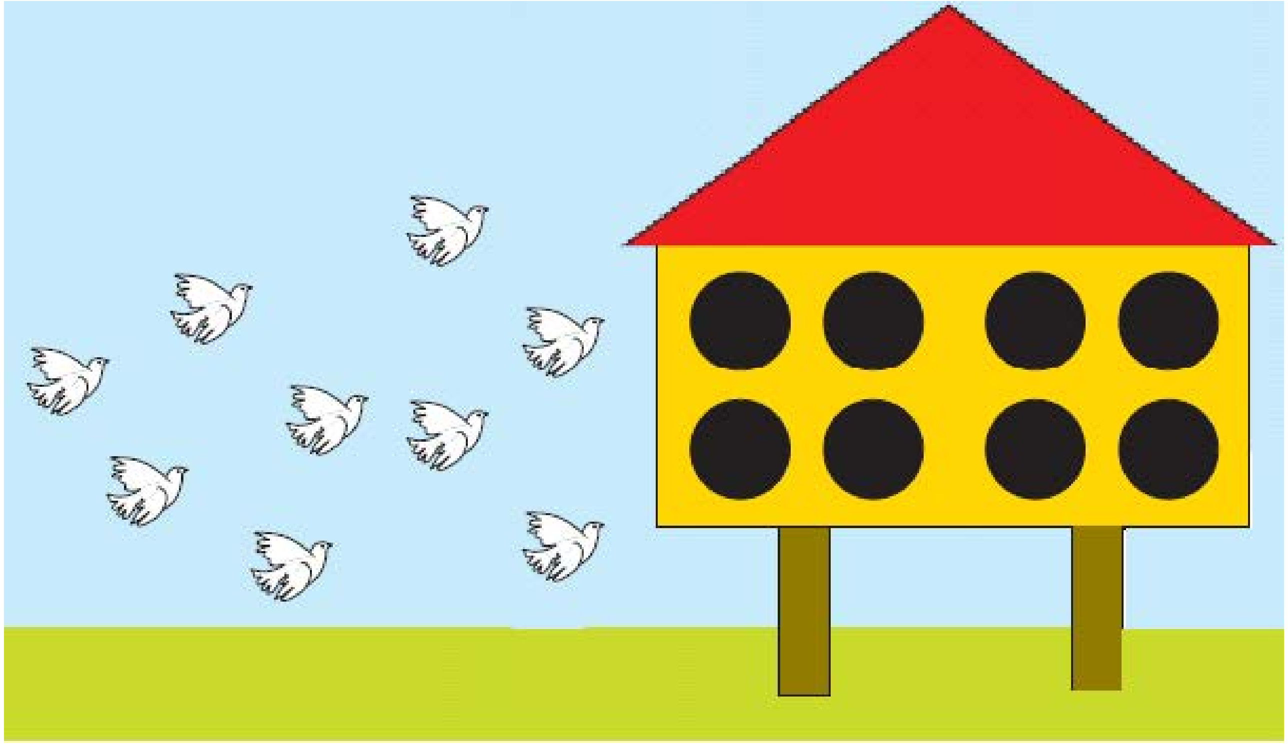
Alicia Pedreira Mengotti
Covadonga Rodríguez-Moldes

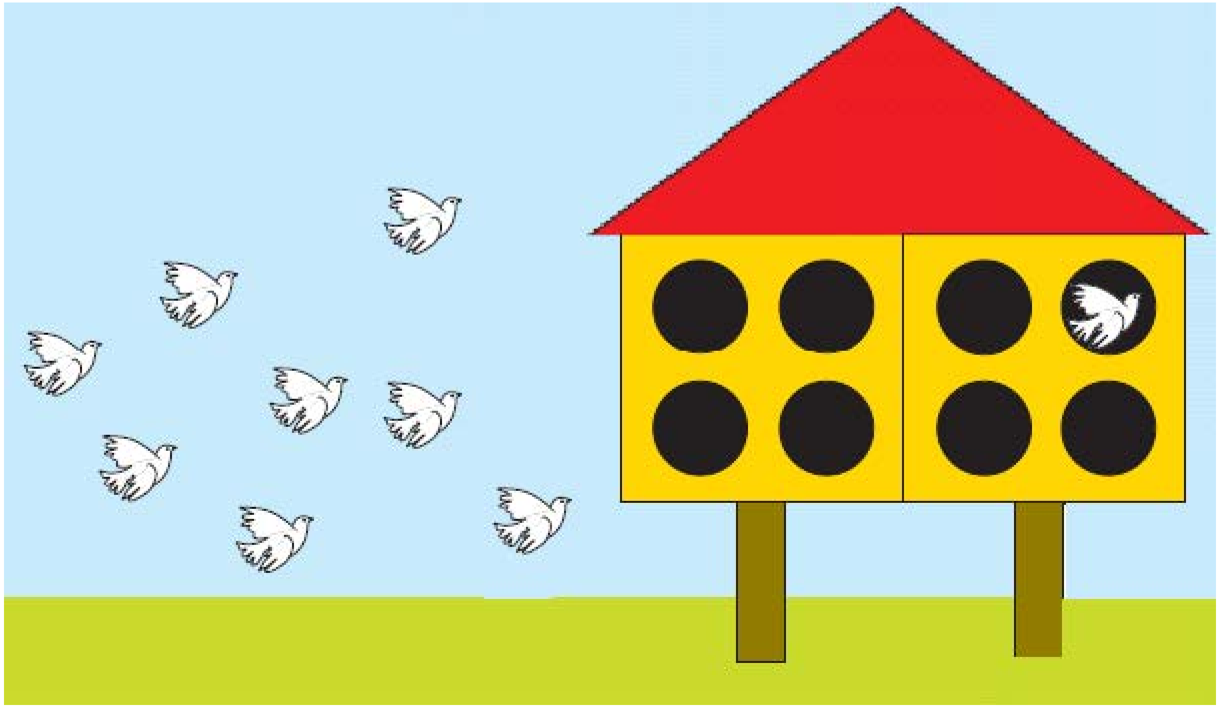
ESTALMAT Galicia

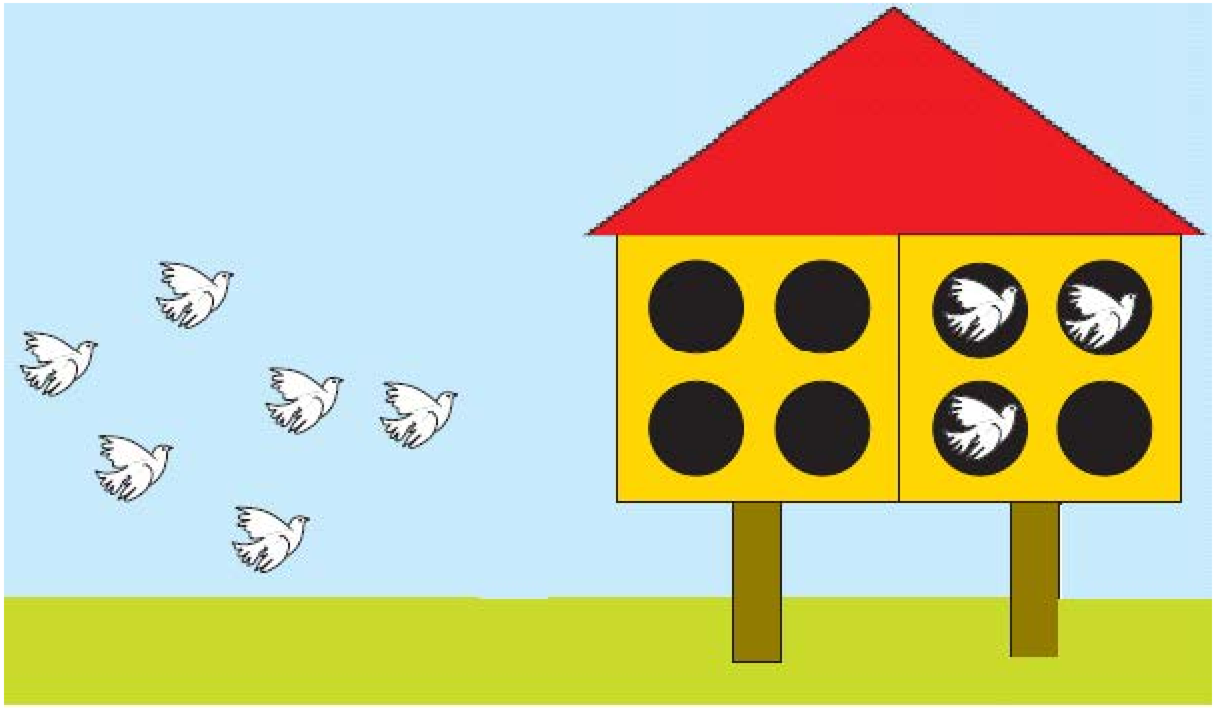
Principio del palomar

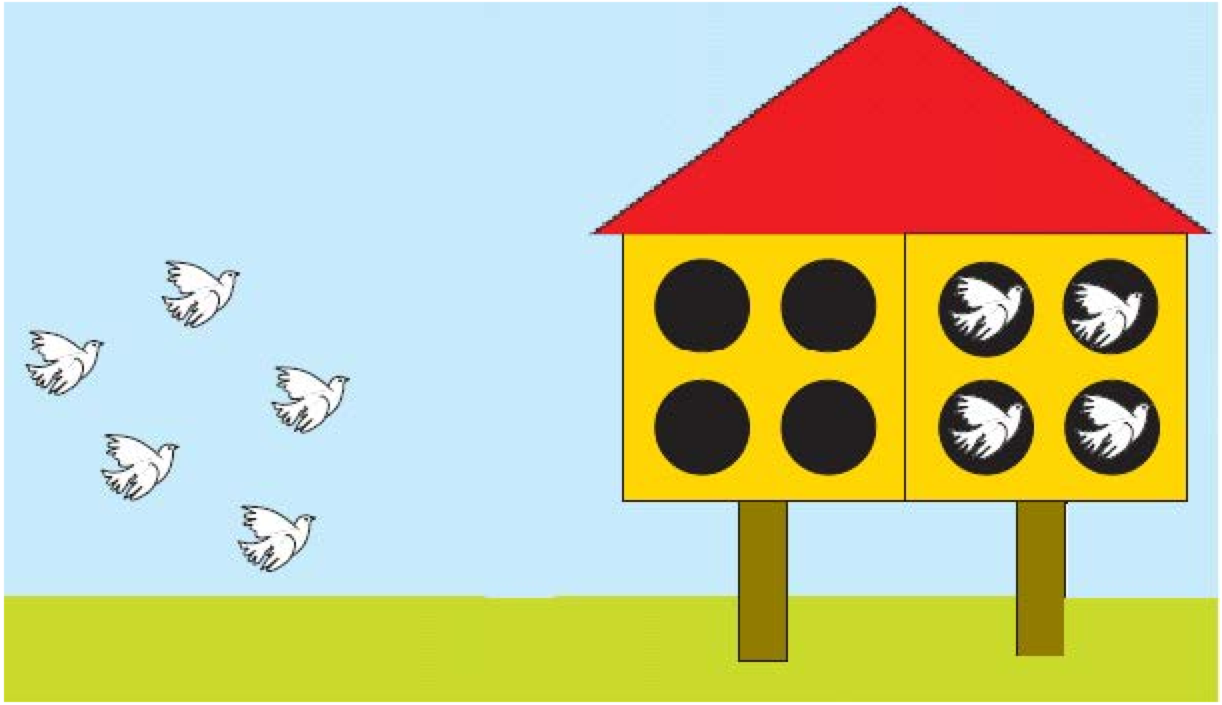


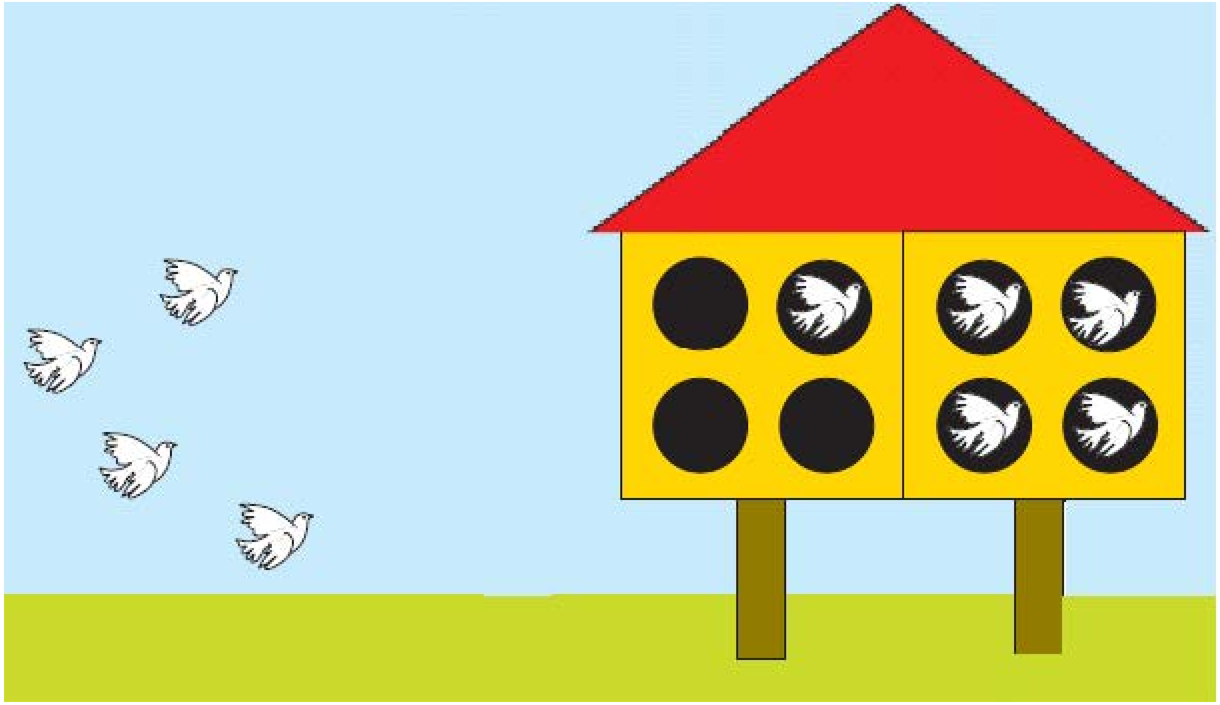
▪

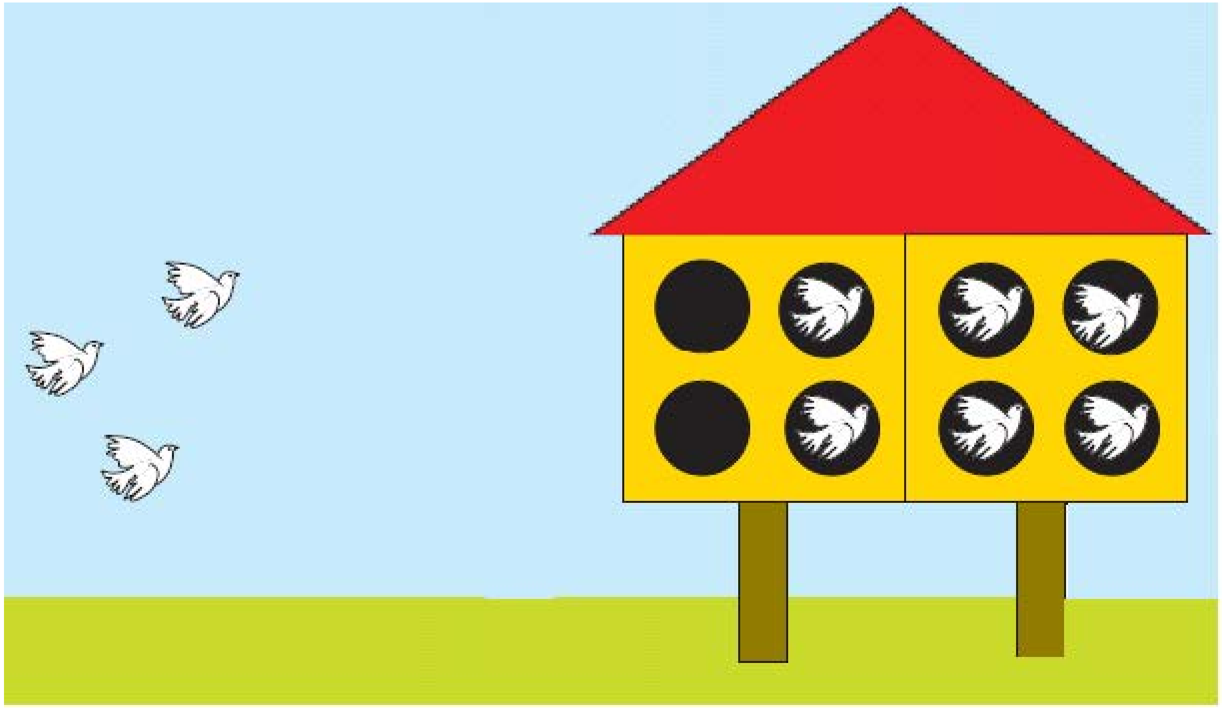


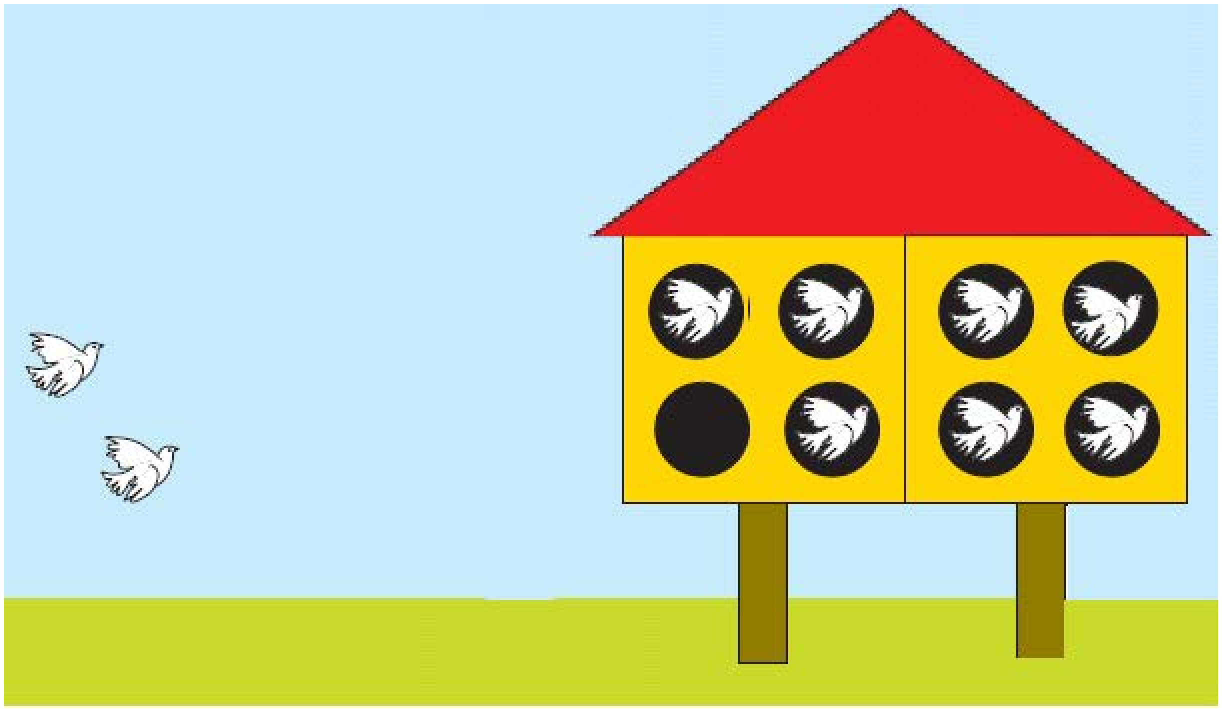












“por lo menos dos palomas entraron por el mismo agujero”

DIRICHLET

Principio del palomar o principio de Dirichlet.

Dirichlet, uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX, lo utilizó extensamente trabaljando en teoría de números y logró con el resultados curiosos, sorprendentes y profundos.

Otros importantes matemáticos como los húngaros Erdös y Szekeres también usaron esta idea para resolver muchos problemas

Principio del palomar

Si n+1 palomas se distribuyen en n agujeros, entonces, por lo menos dos palomas entrarán por el mismo agujero

Este principio también se conoce como principio de las cajas o de las casillas.

Ahora damos una definición más general de este principio

Principio del palomar generalizado

Si n+1 palomas se distribuyen en k agujeros, con n>k, entonces un agujero contiene por lo menos $\left[\frac{n}{k}\right]+1$ **palomas**

Explicación del principio del palomar generalizado

Por reducción al absurdo

Suponiendo que en cada casilla se colocasen como máximo $\left[\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right]$ palomas, usando la desigualdad: $\left[\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right] < \frac{n+1}{k}$

Se obtiene que el número total de palomas es n

$$k \cdot \left[\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right] < k\left(\frac{n+1}{k}\right) = n+1$$

lo que contradice el hecho de que haya n+1 palomas

Ejemplos

En cualquier grupo de 3 personas, por lo <u>menos</u> hay dos del mismo sexo.

En cualquier conjunto de trece personas por lo <u>menos</u> hay dos nacidas el mismo mes.

A ver si sabes la respuesta

¿Cuantas veces hay que lanzar un dado para obtener la misma puntuación por lo menos dos veces?

¿ Y para obtener la misma puntuación por lo menos 3 veces?, ¿y 4 veces?

¿Y para obtener la misma puntuación por lo menos n veces?

Habrá en A Coruña dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

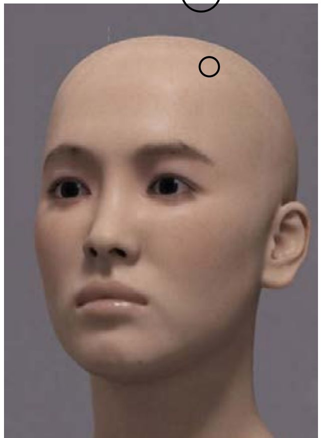
Nunca lo pensé No lo puedo imaginar , hay muchas diferencias

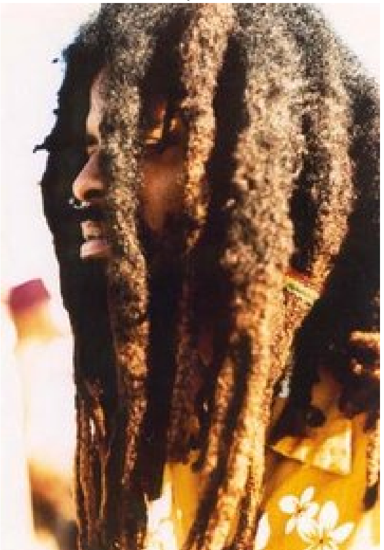
¿Cuantos pelos tiene en la cabeza una persona?

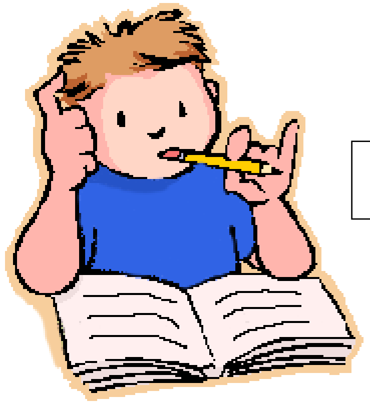
¿Qué tiene que ver eso con las matemáticas?

¡varios millones!

Un montón





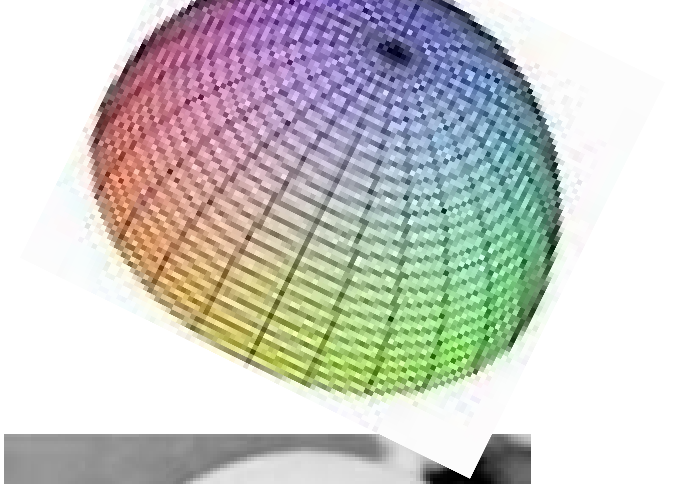


Pasos para dar una respuesta *científica a la pregunta*

Primero hay que averiguar el número máximo de pelos que podríamos tener en la cabeza.

Para eso es necesario saber donde comienza y termina la cabeza y si consideramos los pelos de la parte superior del cuello, los de la barba, los de la cara,…

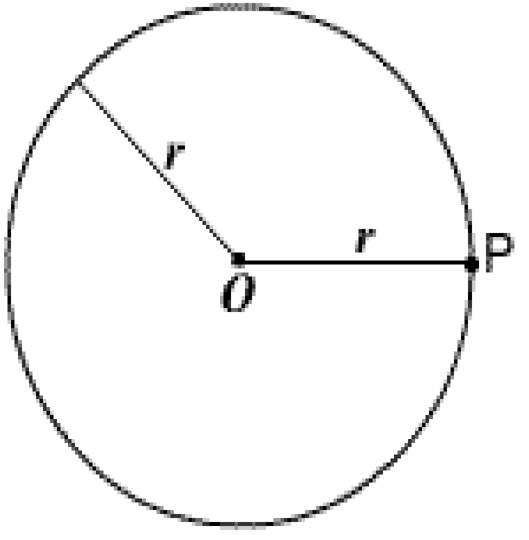
Nos ponemos de acuerdo y decidimos que por ***<u>pelos de la cabeza</u>*** nos referimos únicamente a los pelos de la “cabellera”



Podemos imaginarla como una semiesfera que parte del nacimiento del pelo, en la frente, pasa por las orejas y se cierra por detrás, en la inserción del cuello con la cabeza (apoyo cervical de la cabeza).

1. **Con una cinta métrica determinamos el perímetro craneal, y con la fórmula de la longitud de la circunferencia,** **$L=2·\pi·r$** **hallamos r (radio) con la división:**

$r = L/(2·\pi)$

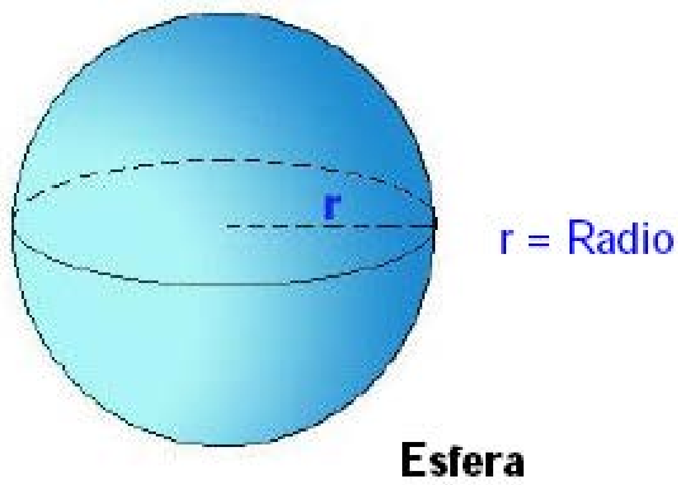


FÓRMULA

$$L = 2\pi\ r$$

$$\boxed{r = \frac{L}{2\pi}}$$

2. Con el radio calculamos la superficie o área de la esfera $A= 4\cdot \pi \cdot r^2$

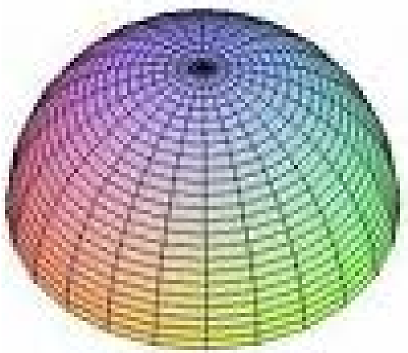


FÓRMULA

$$A = 4\pi r^2$$

3.- Dividimos el área por la mitad (hemisferio superior peludo)

Superficie hemisferio superior "peludo" = $(4\cdot \pi \cdot r^2) /2$



4. Sobre la cabellera marcamos 1 cm² y con ayuda de una lupa contamos los pelos que hay en esa pequeña superficie.

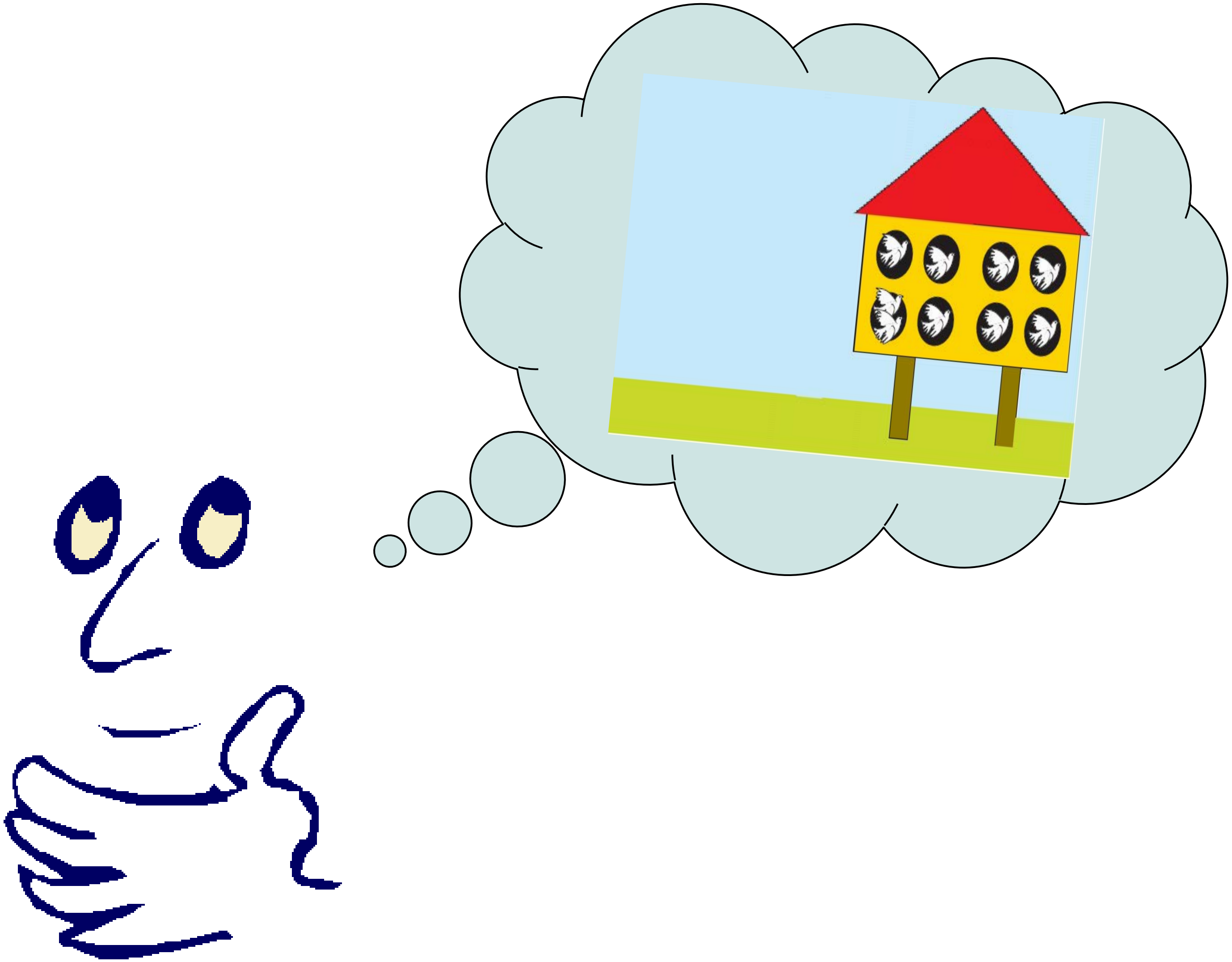
No encontraremos más de 150 por cm²

5. Multiplicamos ese número por la superficie del hemisferio superior "peludo" y obtenemos el número máximo de pelos de tu cabeza.

¿PIENSAS QUE PODRÍA LLEGAR ESA CANTIDAD A 150 000 PELOS?.


Toma tú las medidas...


Ahora podemos asegurar que ninguna cabeza puede tener más de 150 000 pelos. Como además sabemos que el número de habitantes de A Coruña es de 245 164 ....



- **palomas = habitantes de A Coruña = 245 164**
- **agujeros = pelos de la cabeza = 150 000**

Como hay más palomas que agujeros, por lo menos <u>existen dos personas e A Coruña que tienen el mismo número de pelos en la cabeza</u>

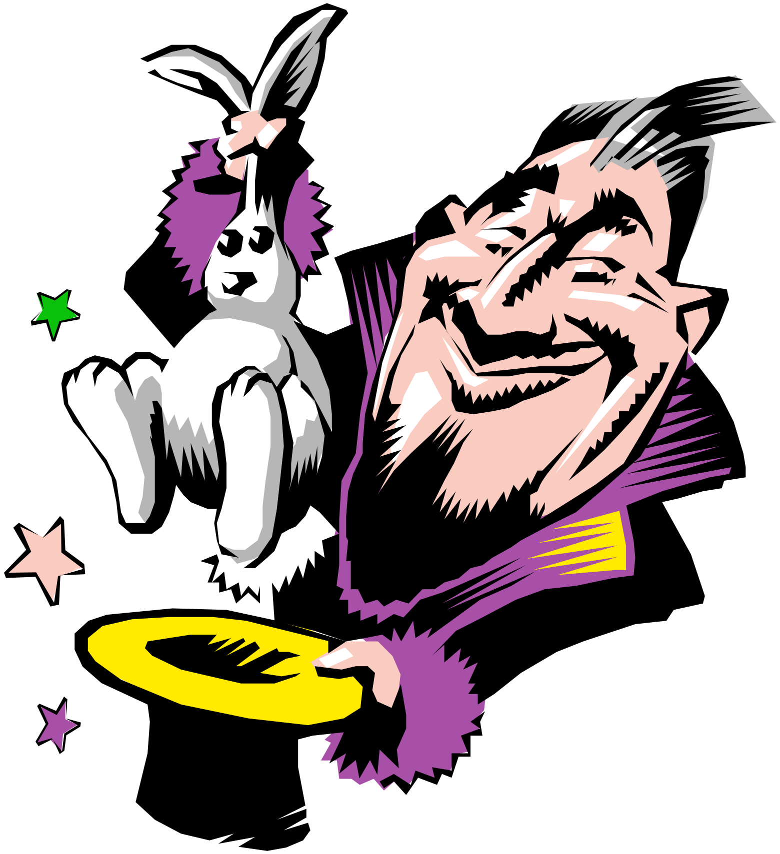

nunha delas.
(Unha aposta de quiniela consiste nun prognóstico de resultado para 14 partidos; en cada partido hai 3 posibles resultados 1,X,2).
EPSON
Hilfiger
85
Toma tú las medidas


apostas de
quiniela que se teñen que
cubrir para asegurarnos
ter como minimo 5 acertos
nunha delas.
Quiniela


PROBLEMA 2
La Quiniela
Determina o número mínimo de apostas de quiniela que se teñen que cubrir para asegurarnos ter como mínimo 5 acertos nunha delas.


PROBLEMA 2
La Quiniela
Determina o número mínimo de apostas de quiniela que se teñen que cubrir para asegurarnos ter como mínimo 5 acertos nunha delas.
(Unha aposta de quiniela consiste nun prognóstico de resultado para 14
en cada partido hai 3 posibles
1,X,2).

PROBLEMA 1



Xan tiene 30 calcetines en una caja: 10 negros, 10 blancos y 10 rojos.

Cuántos calcetines deben sacarse sin mirar, para tener garantizado calcetines:

- **dos de igual color**
- **dos calcetines negros**
- **dos calcetines diferentes**

- 4
- 22
- 11

1) Son 4 porque so o 1é branco, o segundo, negro e o terceiro, vermello, o seguinte ten que ser repetido

2) Son 22 porque se colles os 10 brancos logo os 10 vermellos so quedan negros

3) Son 11 porque se colles 10 iguais o seguinte ten que ser doutro cor

1: 4 calcetíns xa que ao coller 1 de
cada cor logo tería que repetirse 1.

2: 22 xa que aínda que collerás 10
das outras 2 cores acabaríanse
e terías que colle 2 negros

3: 11 xa que no peor dos casos se
collésés 10 acabaríanse e terías
que coller 1 doutra cor

Para dous de igual cor fai falla sacar 4 veces.
Porque en 4 o principio do pombal explica que al menos dous teñen que ser da mesma cor debido a que hai tres tipos de calcetíns

– Para coller dous negros: 22, xa que no peor dos casos sácanse 10 brancos, 10 vermellos e 2 negros.

– Para coller dous de diferente cor: 11, xa que no peor dos casos sácanse todos os dunha cor + 1 doutra cor.

Como hai o mes-mo Nº de calcetins de cada cor teño a mesma posibilidade de sacar un calcetín de cada cor.

$\boxed{10 \quad 10 \quad 10}$

se collo catros veces sen mirar polo menos un color se repetirá.

— Dous negros.

22 veces, porque no peor caso sacaríamos primero os dez dos outros dous colores e logo so teríamos negros polo que ao sacar dous veces xa teríamos 2 negros.

— Dous de diferente cor

11 veces.

A) O haber 3 tipos diferentes de calcetíns, terías que sacar como máximo 4 calcetíns.

B) O haber 10 calcetíns de cada cor, o máximo que terías que sacar serían 22, porque poderías sacar os 10 de un, os 10 do outro e ao final, sacarías outros 2 negros, serían os únicos que quedarían.

C) O haber 10 calcetíns de cada cor, o máximo nº de calcetíns que terías que sacar son 11. debido a que poderías sacar os 10 calcetíns dun cor, e logo un de outro cor.

PROBLEMA 2

**Determina el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos cubrir para asegurarnos tener, por lo menos,
5 aciertos en una de ellas.**

(Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos; en cada partido hay 3 posibles resultados).

La Quiniela

- 1 . VILLARREAL – MALLORCA
- 2 . R. MADRID - OSASUNA
- 3 . BARCELONA – DEPORTIVO
- 4 . SEVILLA – NUMANCIA
- 5 . GETAFE – RACING
- 6 . RECREATIVO – SPORTING
- 7 . VALLADOLID - BETIS
- 8 . MÁLAGA - ESPANYOL
- 9 . ALMERÍA - AT. MADRID
- 10 . TENERIFE – GIRONA
- 11 . ALBACETE - HÉRCULES
- 12 . SALAMANCA - MURCIA
- 13 . CÓRDOBA – ZARAGOZA
- 14 . LEVANTE - R. SOCIEDAD

14 partidos · 3 resultados = 42 resultados posibles

Necisitamos 3 en una ponemos que todos ganan en la otra todos pierden y en la otra todos empatan, así si fallan las dos quinielas una tiene que estar bien, porque sempre tes que ganar se nunha a tes mal noutra a tes que ter obligatoriamente ben.

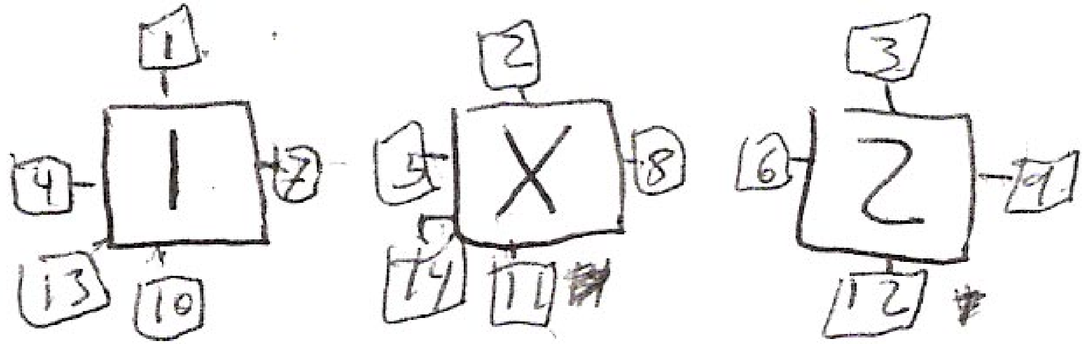
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		

(as que tes mal mesta)

	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	
	X	

		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2

(teñen que estar ben en estas)



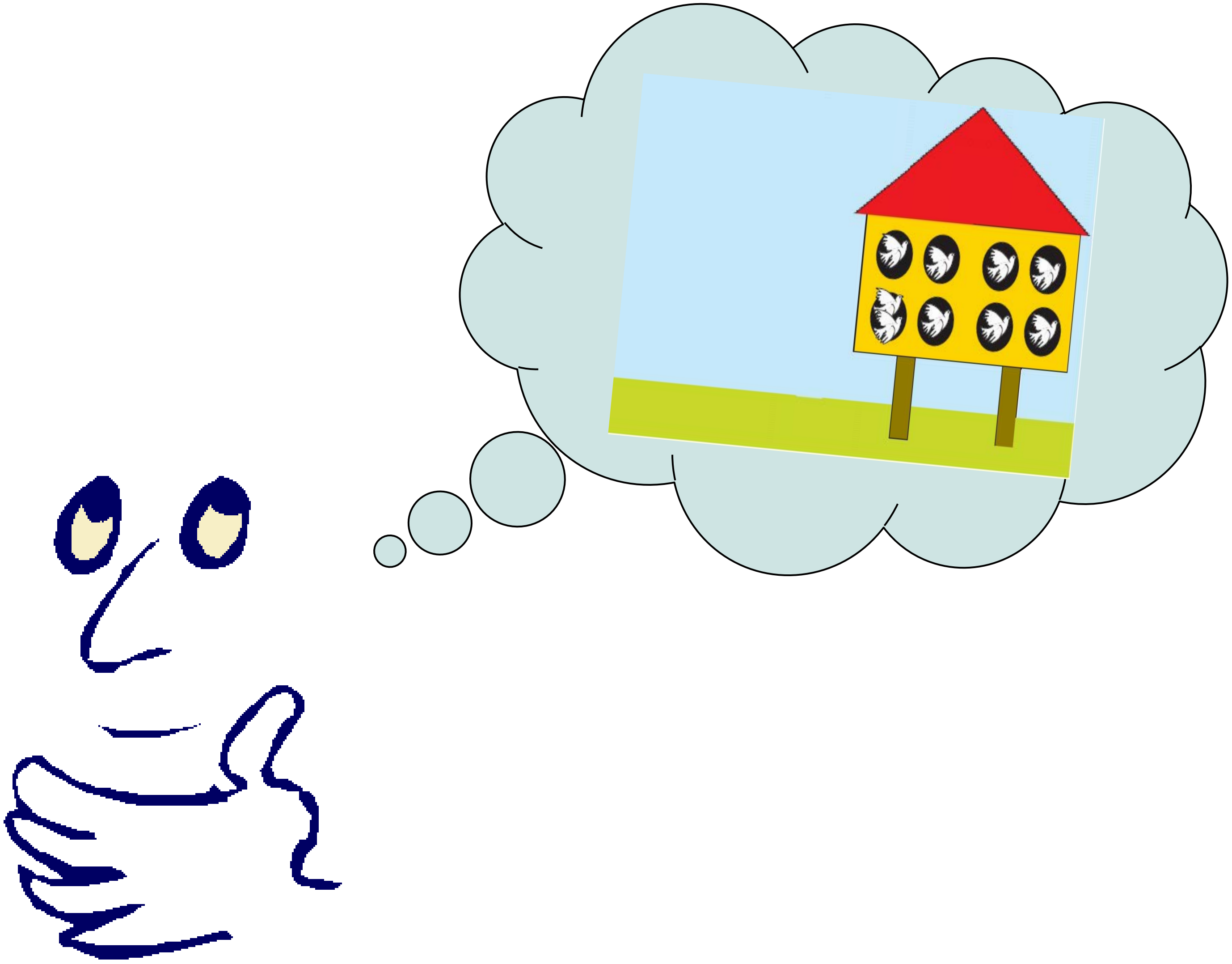
$\boxed{3}$ columnas

$\boxed{1}$ columna de $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ columna de $\boxed{Z}$

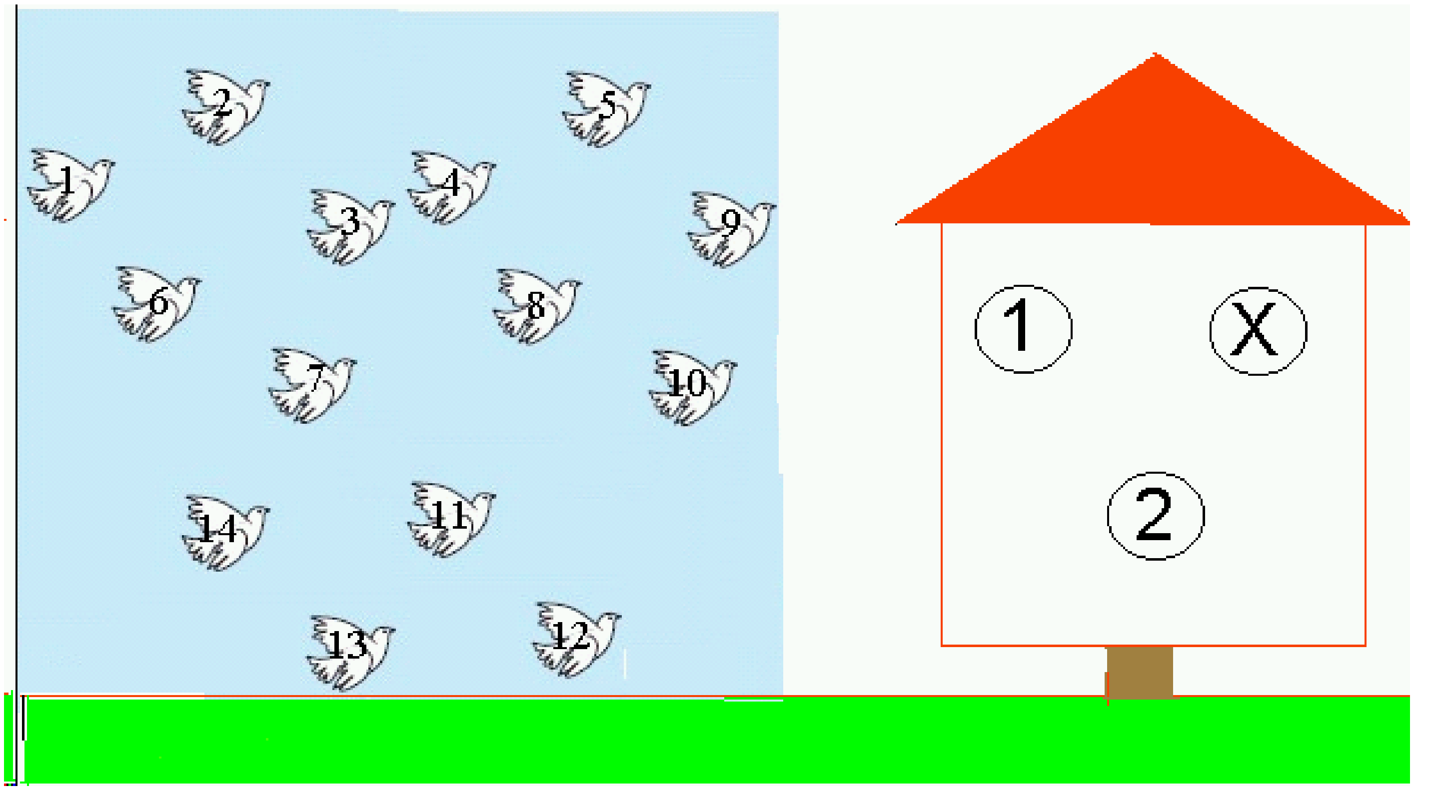
$\boxed{1}$ columna de $\boxed{X}$

Necesitaremos 3 porque soamente temos 3 posibles solucións, ~~e todos os posibles combinacións~~ unha sería todo 1, outra todo X e outra todo 2. No peor dos casos quedarían 1, X, 2, 1, X, 2...



Solución del problema 2

- **palomas = partidos = 14**
- **agujeros = resutados = 1,X,2**



Solución

hay que cubrir 3 apuestas:

En 14 partidos, hay un resultado (1, X o 2) que se repite por lo menos 5 veces, por lo tanto hacemos las tres apuestas que siguen:

1ª apuesta: todos 1

2ª apuesta: todos X

3ª apuesta: todos 2

En una de ellas tenemos por lo menos 5 aciertos.

PROBLEMA 3

En el estadio de Riazor, juega el Deportivo con

El Real Madrid, ya no quedan localidades.

Xan quiere saber cuántos espectadores por lo menos cumplirán años el mismo día. ¿Puedes ayudarlo?

(El estadio tiene capacidad para 34 600 personas)


PROBLEMA 3
No estadio de Riazor, xoga o Deportivo co Real Madrid e o campo está cheo.non quedan
ies.
epa quere saber cal é o número mínimo de
pectadores que cumpren anos o mesmo día.
des axudala?
(O estadio te
ara 34600 persoas)

34600 : 365 = 94 persoas..

94+1=95 persoas

34600	365
1750	94
290	

34.600 persoas = pombas

365 = buracos

Van 94 persoas a cada buraco e sobran 290 persoas.
Entón en 290 buracos hai 95 persoas e en 75 hai 94 persoas. (no peor caso).

34600

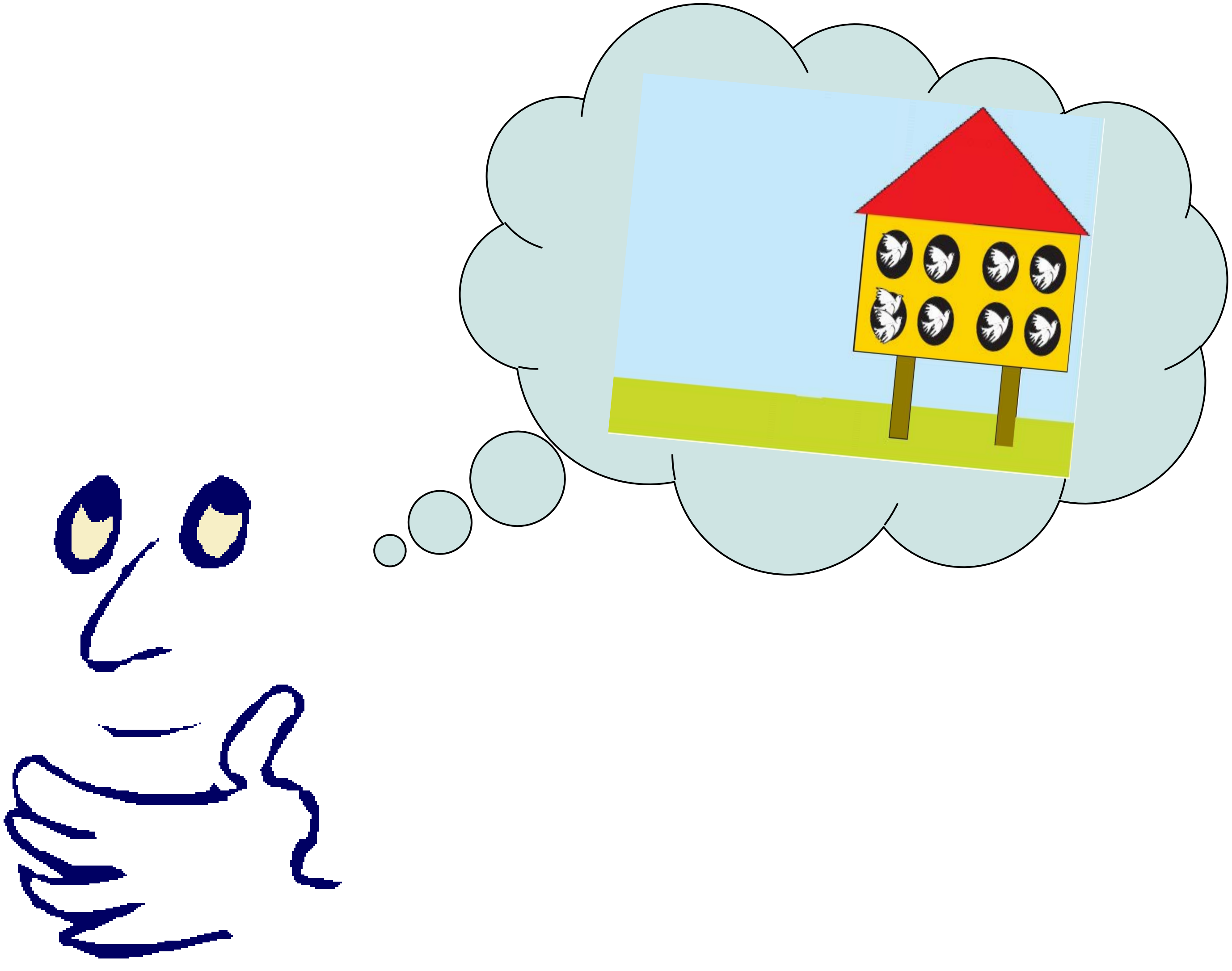
~~95% porque $\frac{34600}{365}$ son 94'79 etc~~

porque no peor dos casos habería
94 cada día pero entón non chegan
a 34600 (94·365= 34310) e se
fosen 96 no peor dos casos sería
(95 365 = 34675) que se pasa
polo que son 95

persoas = palomas
buracos =

• 94 persoas, porque 34600 (que é o número de espec-
tadores entre 365 (os días do ano) dá 94'79, e como
non podemos partir unha persoa, significa que, como mínimo
95 cumpren no mesmo mes.

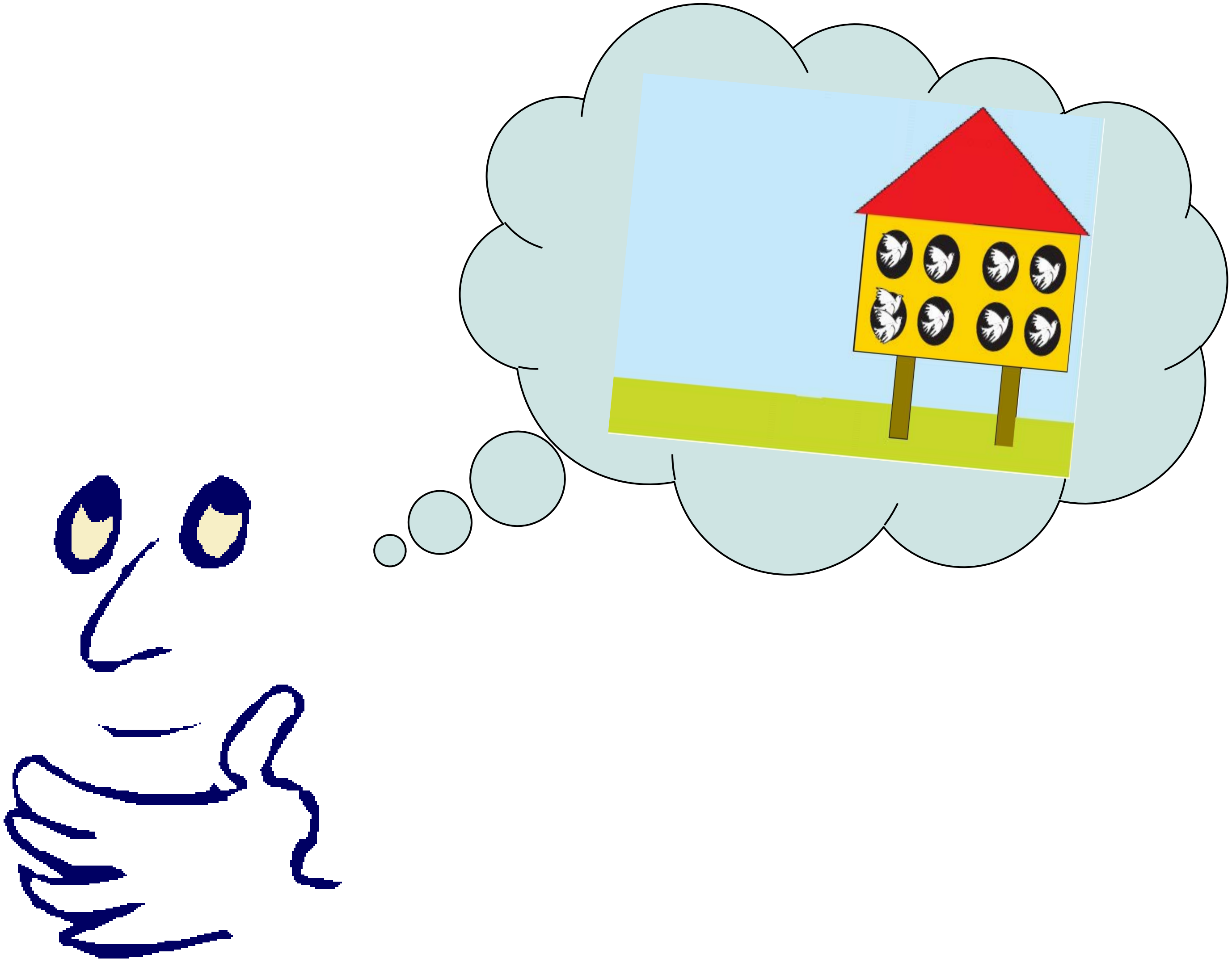
O número mínimo de persoas que
cumple un mesmo día é de 94, xa
que ~~[illegible]~~ 34.600 : 365 = 94'... é dicir,
+ de 94 : 95.
Se cumpren menos persoas nun día,
cumpren máis nos outros días.



PROBLEMA 4

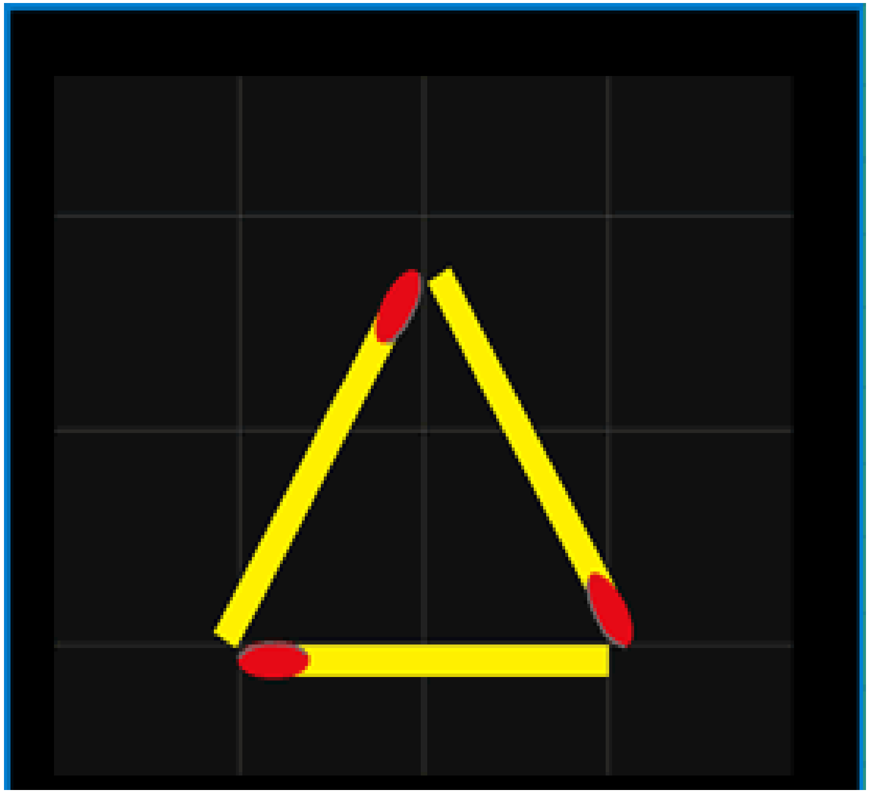
El océano cubre más de la mitad de la superficie de la tierra.

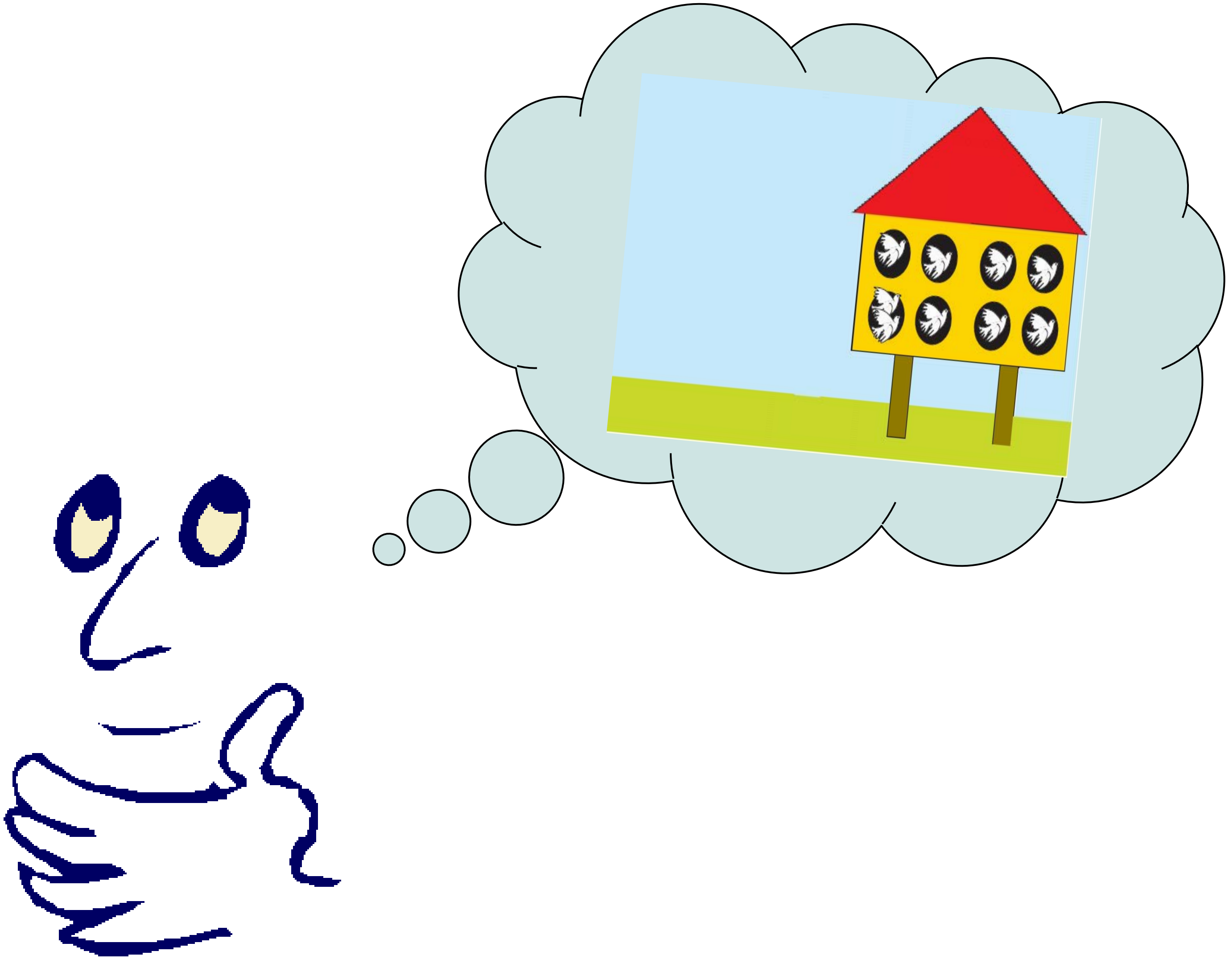
¿Puedes probar que, por lo menos hay dos puntos en el océano situados exactamente en extremos opuestos de un diámetro de la tierra?



PROBLEMA 5

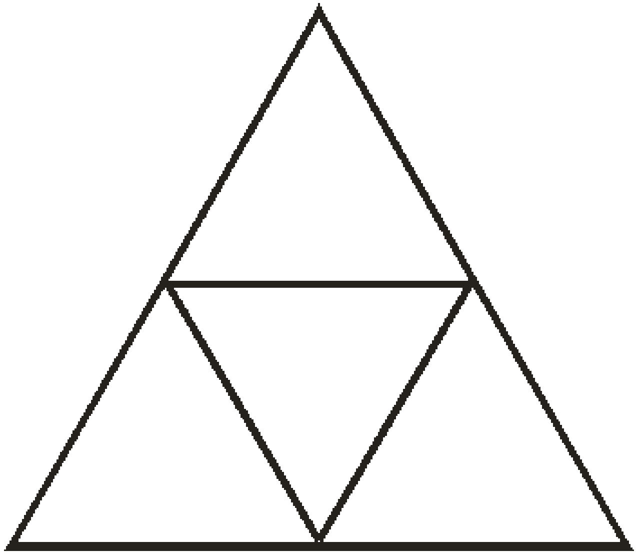
Demostrar que dados cinco puntos cualesquiera sobre un triángulo equilátero de lado 2, por lo menos hay dos en los que la distancia entre ellos es menor o igual a 1.

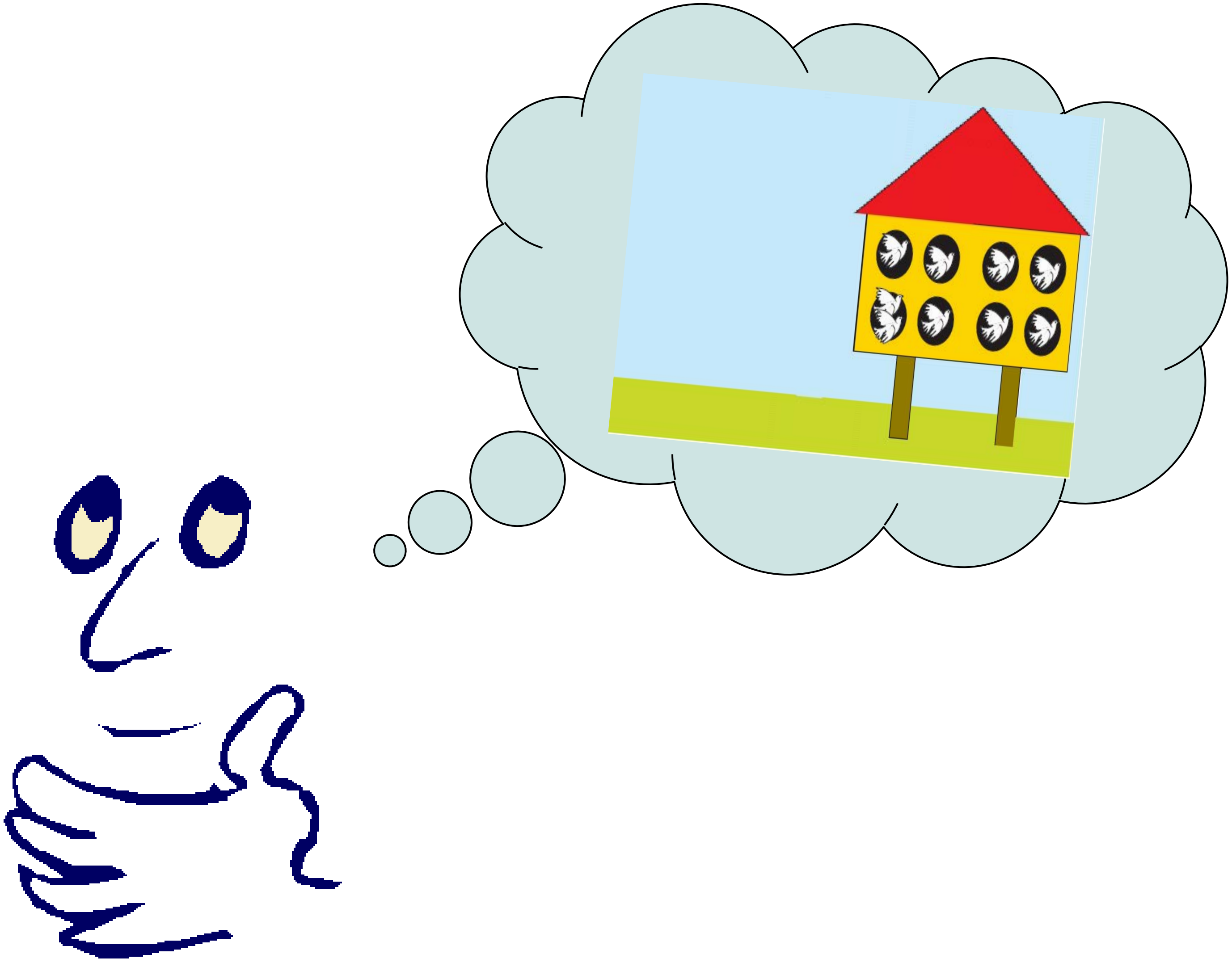




Solución

Aquí hay que crear los agujeros; las palomas son los cinco puntos y buscamos dos de ellos a una distancia menor o igual que uno.



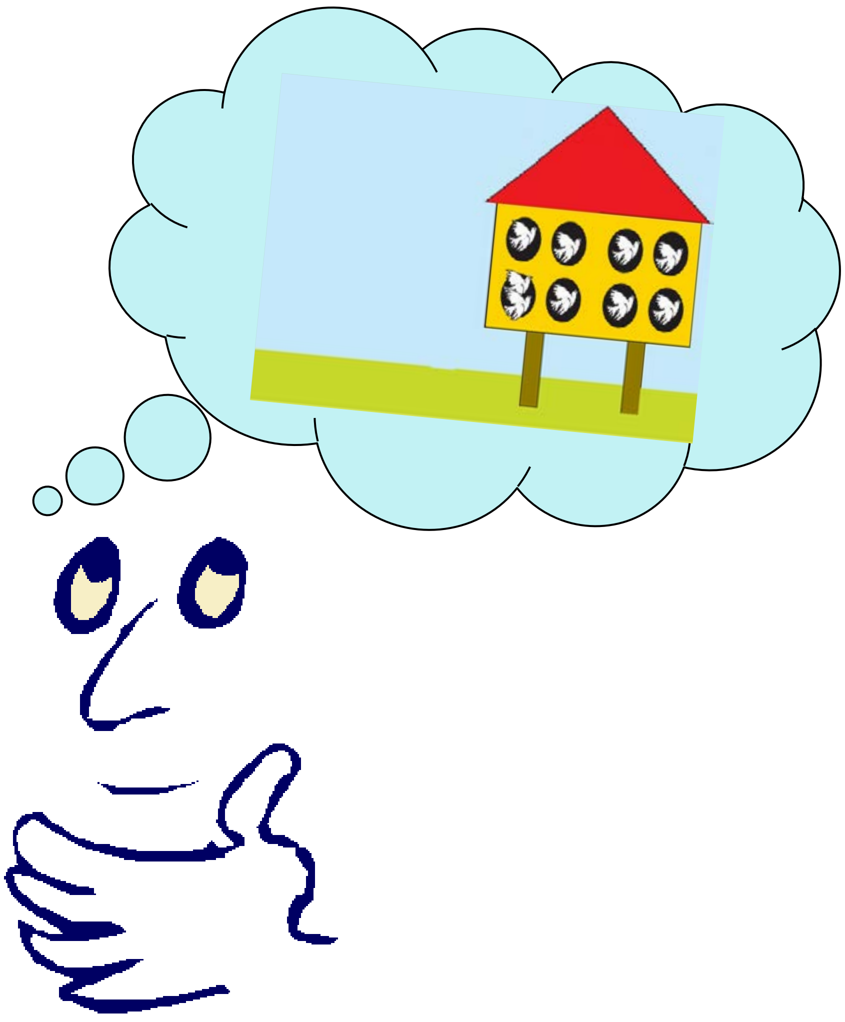


PROBLEMA 6

Demuestra que en cualquier conjunto de 8 números enteros, existen por lo menos dos números, a y b, tales que a-b es múltiplo de 7

Solución

- Al dividir cualquier número por 7 los posibles restos son: 0,1,2,3,4,5,6
- Si tenemos 8 números, como solo hay 7 restos diferentes, por lo memos dos dan el mismo resto.
- Restando esos dos temos un múltiplo de 7



ESTALMAT Galicia   1º Curso   **"O principio do pombal"**   6/10/2012
Problemas

1.- Pedro ten 30 calcetíns nunha caixa: 10 negros, 10 brancos e 10 vermellos.

Averigua cantos calcetíns debe sacar da caixa sen mirar, para ter garantizado:

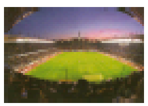
- coller dous de igual cor
- coller dous calcetíns negros
- coller dous calcetíns de diferente cor

2.- Determina o número mínimo de apostas de quiniela que se teñen que cubrir para asegurarnos de ter como mínimo 5 acertos nunha delas.

La Quiniela

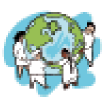
(Unha aposta de quiniela consiste nun prognóstico de resultado para 14 partidos; en cada partido hai 3 posibles resultados: 1, X, 2).

3.- No estadio de Riazor, xoga o Deportivo co Celta e o campo está cheo, non quedan



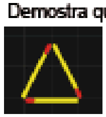
localidades libres. Antón está no campo e quere saber cal é o número mínimo de espectadores que cumprirán anos o mesmo día.
Podes axudalo? (O estadio ten capacidade para 34600 persoas)

4.- O océano cubre máis da metade da superficie da terra. Podes probar que existen



dous puntos no océano situados exactamente en extremos opostos dun diámetro da terra?

5.- Demostra que dados cinco puntos calquera sobre un triángulo equilátero de lado 2 cm,



polo menos hai dous tales que a distancia entre eles é menor ou igual a 1cm.

6.- Demostra que en calquera conxunto de 8 números enteiros existen polo menos dous

números, a e b, tales que a-b e múltiplo de 7.

ESTALMAT GALICIA 2011-2012   **"O principio do pombal"**
21/04/2012   Problemas

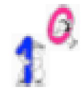
6.- Demostra que en calquera conxunto de 8 números enteiros existen polo menos dous

números, a e b, tales que a-b é múltiplo de 7.

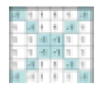
7.- Demostra que en calquera conxunto de n+1 números enteiros existen polo menos dous

números, a e b, tales que a-b é múltiplo de n.

8.- Demostra que todo número enteiro positivo, n, ten un múltiplo formado so por ceros e uns.

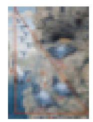


9.- Xan quería conseguir, escribindo "1" ou "- 1" un cadrado 6x6 coa condición que todas as



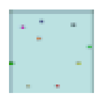
sumas verticais, horizontais e diagonais deran resultado diferente. Pero unha das nosas pombiñas estaba cerca e díxolle: "Deixao, Xan, non é posible! ". Tiña razón a pombiña?.

10.- Considera un triángulo de lados 6, 8 e 10. Dados nove puntos calquera no interior deste



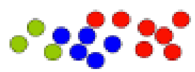
triángulo, proba que sempre existe un triángulo con área inferior a 6 que ten por vértices a tres destes puntos. *(Da Olimpíada Matemática Galega 2005)*

11.- Dados 9 puntos nun cadrado de lado 1, proba que sempre hai tres puntos tales que a



área do triángulo que forman é menor ou igual que 1/8. *(Da Competición Matemática de Beijing, 1963)*

12.- Alexandro ten un bote con trinta canicas de tres cores. El sabe que se saca vintecinco



canicas ó chou, entre elas sempre haberá: como mínimo, tres canicas verdes; como mínimo, cinco canicas azuis, e como mínimo, sete canicas vermellas. Cantas canicas de cada cor hai no bote? *(Do Open Matemático 2008)*

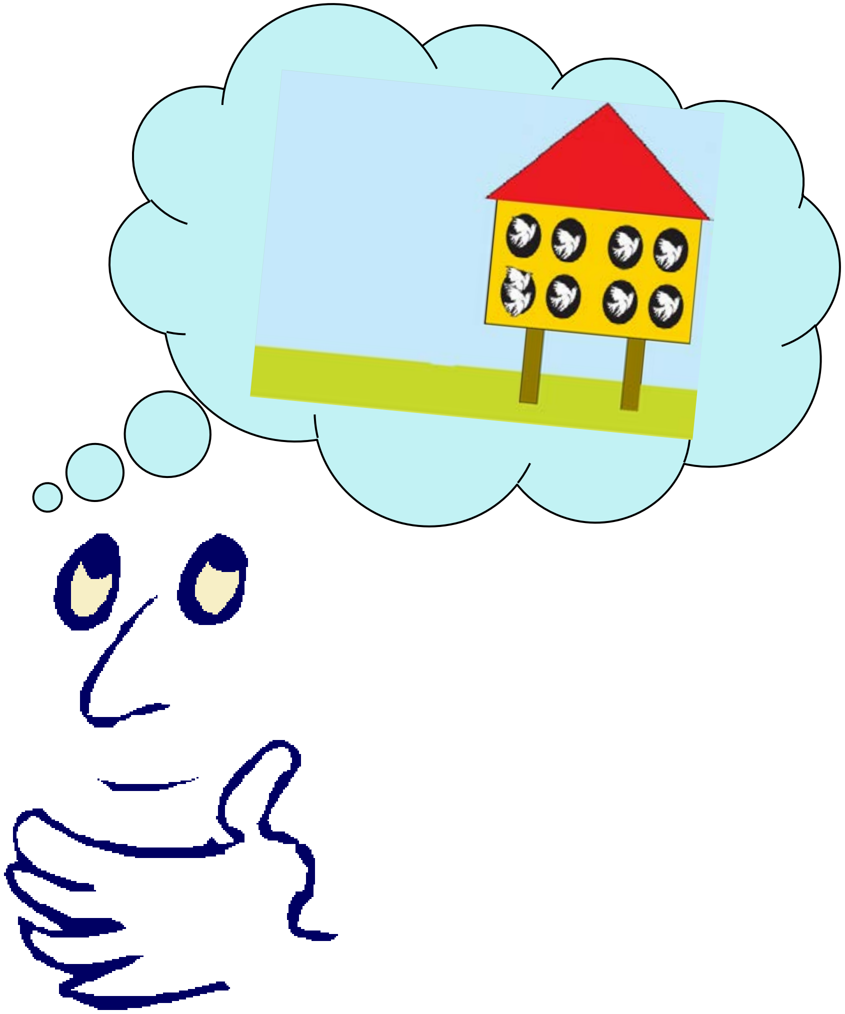
Alicia Pedreira (mengotti@edu.xunta.es) e Covadonga Rdguez-Moldes (rodriguez-moldes@edu.xunta.es)

PROBLEMA 7

Demuestra que en cualquier conjunto de n+1 números enteros, existen por lo menos dos números, a y b, tales que a-b es múltiplo de n

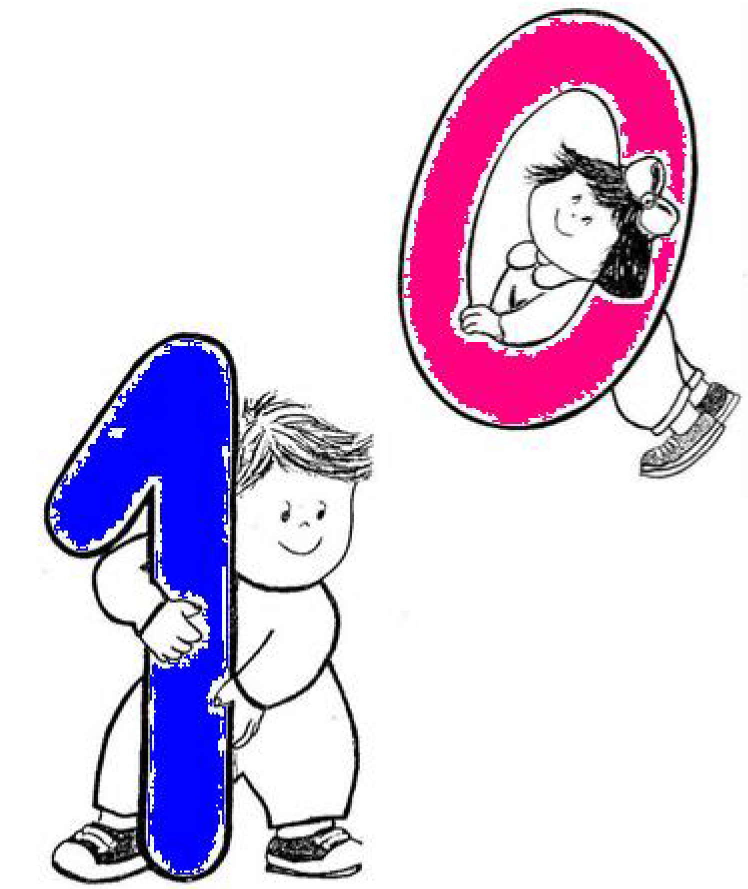
Solución

- Al dividir cualquier número por n los posibles restos son: 0,1,2,...,n-1
- Si tenemos n+1 números, como solo hay n restos diferentes, por lo menos dos dan el mismo resto.
- Restando esos dos tenemos un múltiplo de n



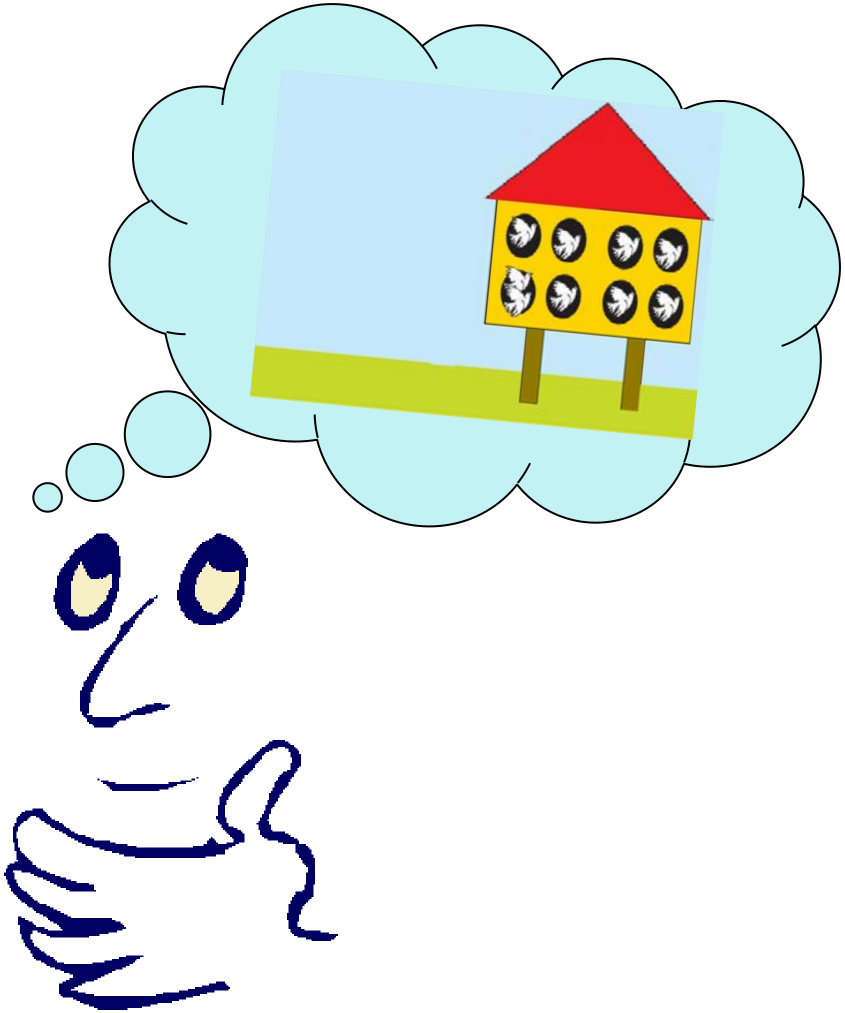
PROBLEMA 8

Demuestra que todo número entero positivo, n , tiene un múltiplo formado solo por ceros y unos

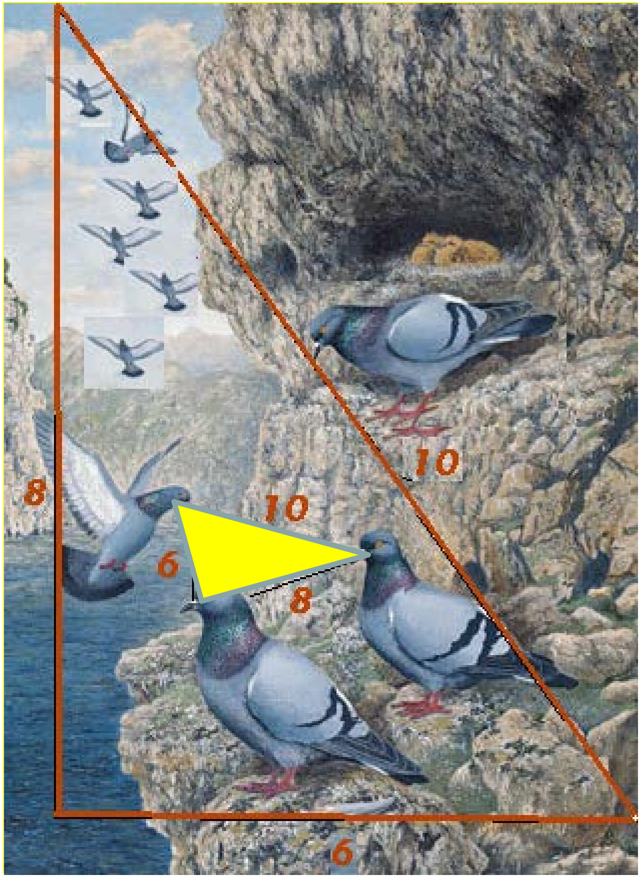


Solución

- Cogemos: 1, 11, 111,… (n+1 números), existen dos tales que su diferencia es múltiplo de n
- Restando esos dos, tenemos un número con unos y ceros que es múltiplo de n



PROBLEMA 10

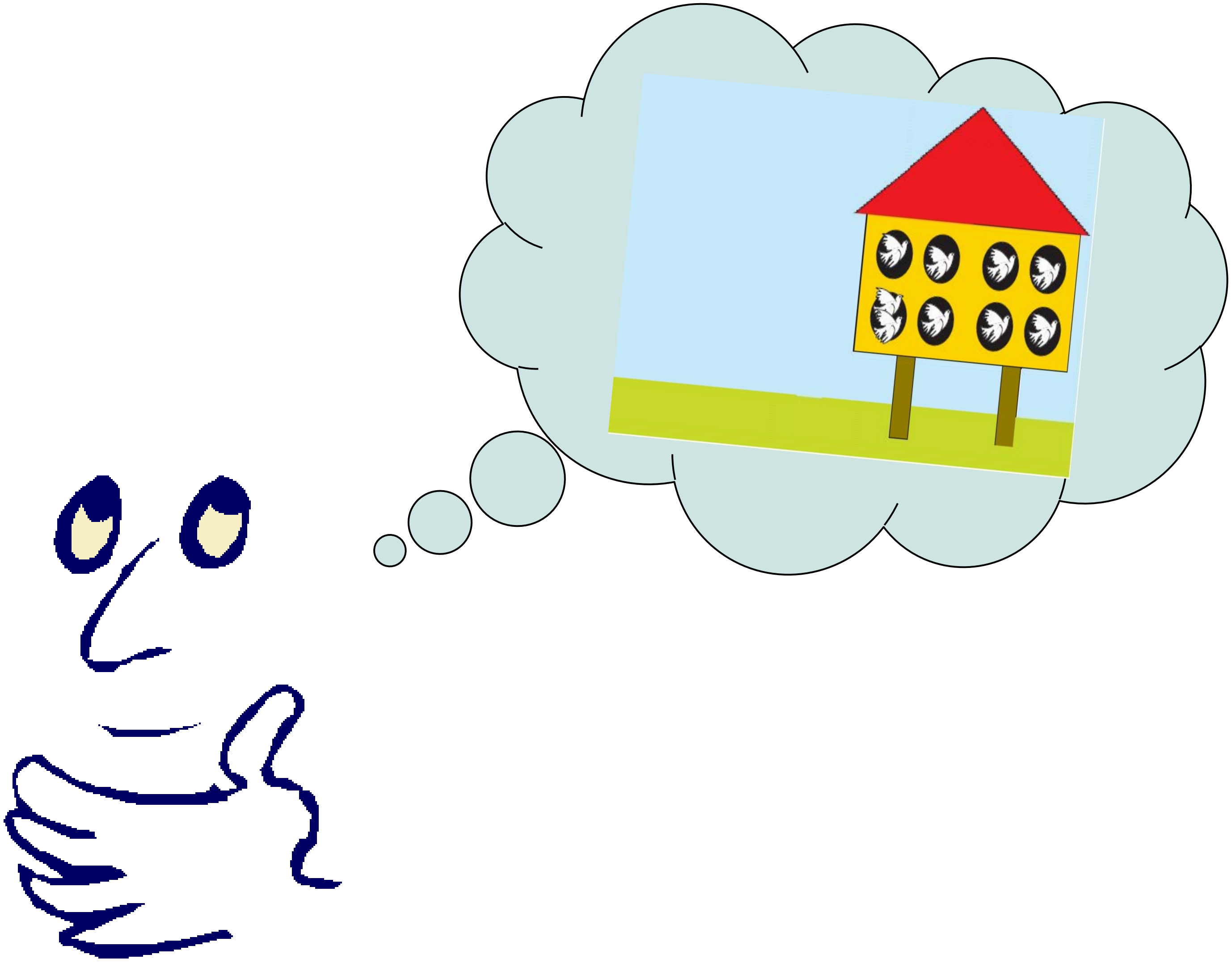


Tenemos un triángulo de lados

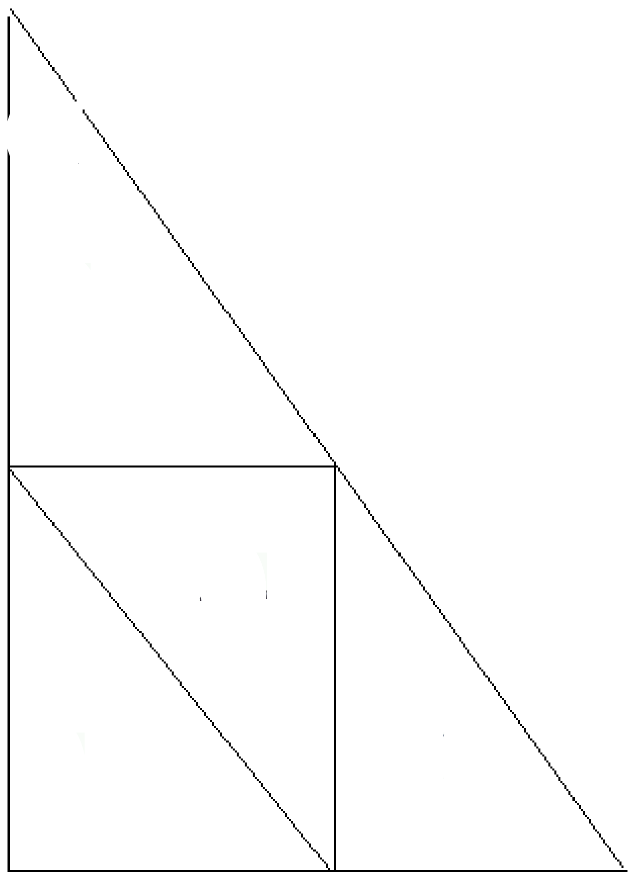
6, 8 y 10.

Dados nueve puntos cualesquiera del interior de este triángulo, prueba que siempre existe un triángulo con área inferior a 6 que tiene por vértices a tres de estos puntos

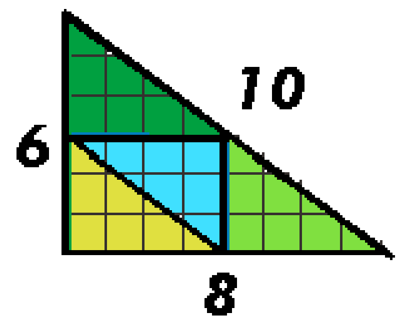
(Olimpiada Matemática Galega 2005)



Solución



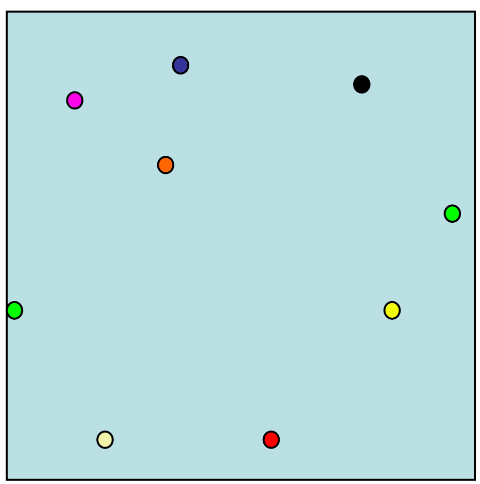
El triángulo de lados 6,8,10 es rectángulo porque $6^2+8^2=10^2$. Luego su área será: (6.8):2=24



Si unimos los puntos medios de los lados obtenemos 4 triángulos de área =24/4 =6

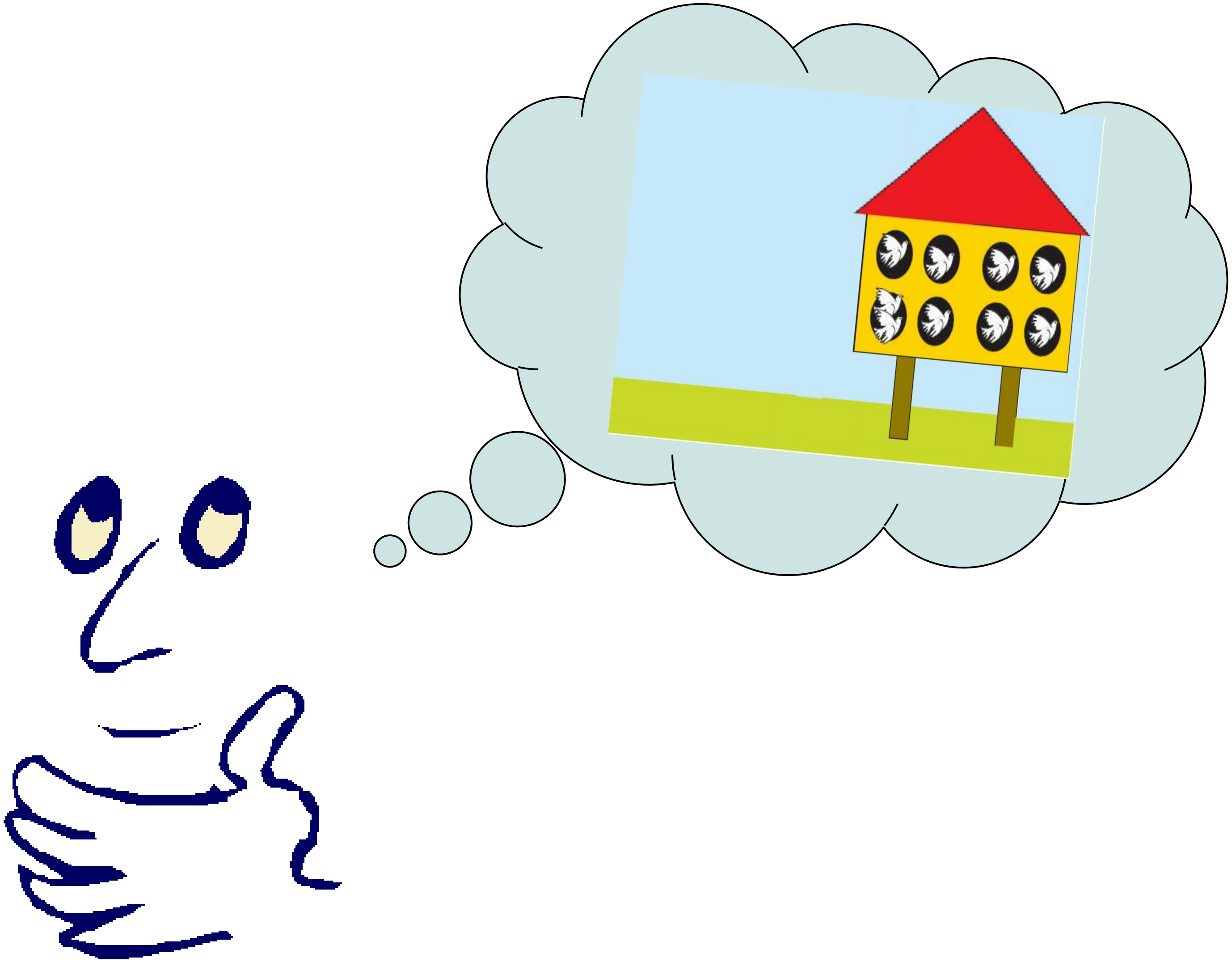
Como hay 9 puntos y 4 triángulos, en alguno de los 4 triángulos habrá 3 puntos, luego su área será inferior a 6.

PROBLEMA 11

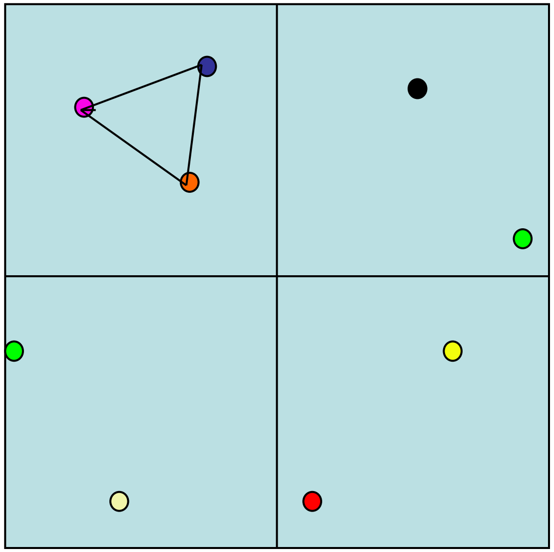


Dados 9 puntos en un cuadrado de lado 1, prueba que siempre hay tres puntos tales que el área del triángulo que forman es menor o igual que 1/8.

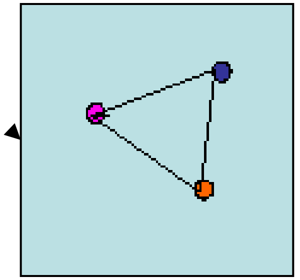
(Competición matemática Beijing, 1963)



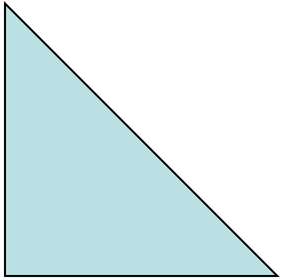
Solución



Área cuadrado grande =1



Área cuadrado pequeño=1/4



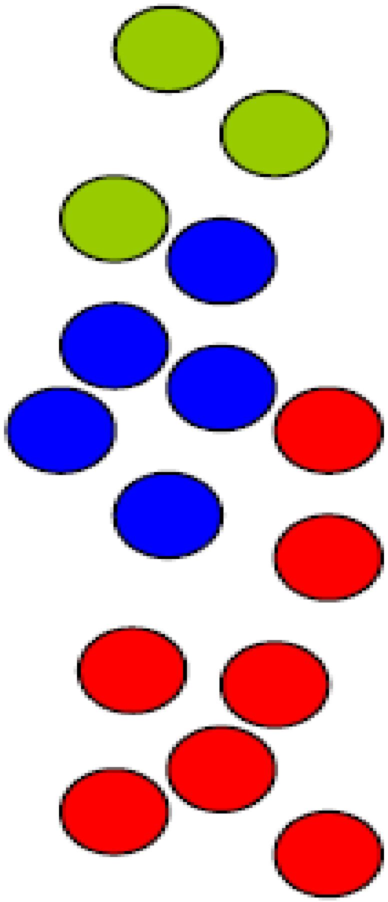
Área del mayor triángulo en el interior del cuadrado anterior=1/8


¡ ya está bien de palomas!
el último y.... ¡¡a descansar!!

PROBLEMA 12

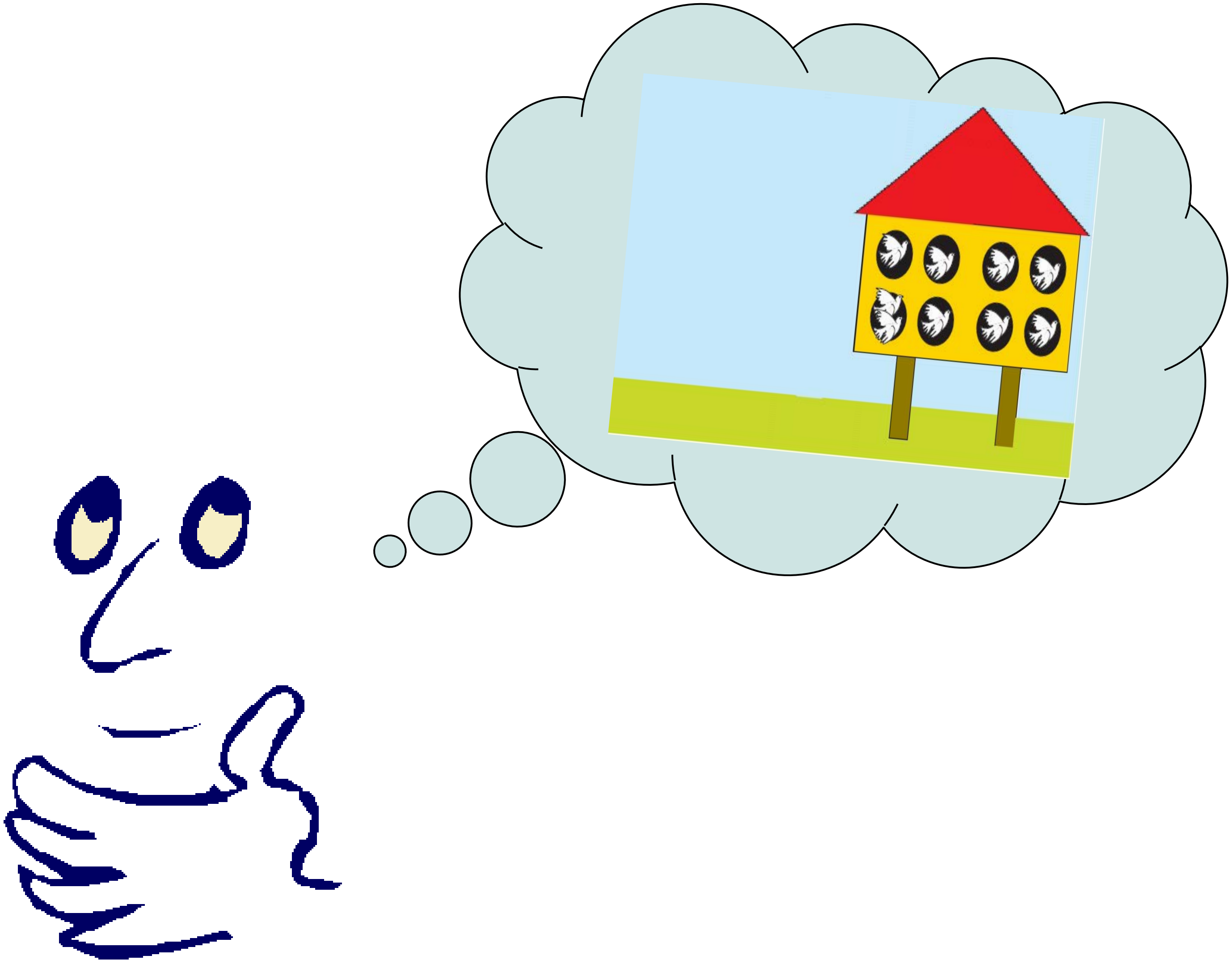
Alexandro tiene un bote con 30 canicas de tres colores.

El sabe que si saca 25 canicas al azar, entre ellas sempre habrá: como mínimo, tres canicas verdes; como mínimo, cinco canicas azules, y como mínimo, siete canicas rojas.



¿Cuántas canicas de cada color hay en el bote?

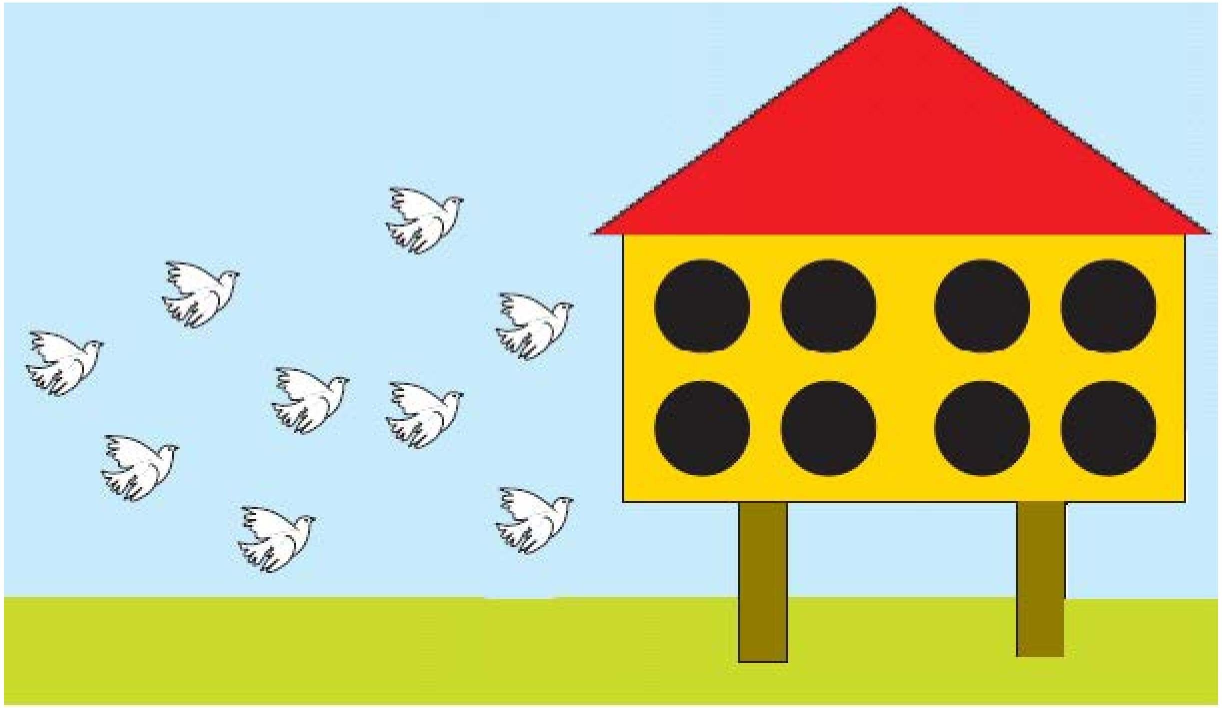
(Open Matemático 2008)



Solución

- **Pongámonos en el peor de los casos:**
  a) Si, tras la extracción, las cinco bolas que dejamos en el bote son todas verdes, para que sea cierto lo que asegura Alexandro (en grupo de 25 que sacamos hay siempre, como mínimo, 3 verdes), en el bote debía de haber por lo menos 8 bolas verdes.
  b) Analogamente, si las cinco bólas que dejamos en el bote tra la extracción de 25 son todas azules, para que sea cierto lo dicho por Alexandro (en el grupo de 25 hay siempre, como mínimo, 5 azules), el bote debía contener por lo menos 10 bólas azules.
  c) y finalmente, si las cinco bólas que dejamos son todas rojas, para que sea certa a afirmación de Alejandro (en el grupo de 25 hay siempre, por lo menos 7 rojas), en el bote debía de haber por lo menos 12 bólas rojas.
  Por lo tanto, e bote contiene, como mínimo, 8 bolas verdes, 10 azules y 12 rojas.
- **y como 8 + 10 + 12 = 30, esa es precisamente la composición de bolas del bote.**

El PRINCIPIO DEL PALOMAR ESTÁ PRESENTE EN LOS CONCURSOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



XL Olimpiada Matemática Española

OMG 2004

venres 16 de xaneiro de 2004

Problema 1. Encontrar tódalas funcións $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f(f(n)) = n + 2$ para todo número natural n.

Problema 2. Determinar o número mínimo de apostas de quiniela que debemos cubrir para asegurármonos que obtemos, polo menos, 5 acertos nunha delas. (Unha aposta de quiniela consiste nun pronóstico de resultado para 14 partidos; en cada partido hai 3 posibles resultados).

Problema 3. ¿Podemos trazar 2003 segmentos no plano, de xeito que cada un deles corte exactamente a outros tres?

XLI Olimpiada Matemática Española

OMG 2005

venres 14 de xaneiro de 2005

Problema 1. Probar que existe un número natural divisible por 2005 tal que as súas cifras suman 2005.

Problema 2. Considerar un triángulo de lados 6, 8 e 10. Dados nove puntos calquera no interior deste triángulo, probar que sempre existe un triángulo con área inferior a 6 que teña por vértices a tres destes puntos.

Problema 3. Determinar cantas funcións $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existen tales que $f(2f(n)) = n + 2005$.

XLII Olimpiada Matemática Española

OMG 2006

venres 20 de xaneiro de 2006

<u>**Problema 1**</u>. Sete gnomos gardan o seu tesouro no soto dun castelo. O tesouro está detrás de 12 portas, cada una delas con 12 pechaduras. Probar que será necesario repartir por lo menos 336 chaves se queren que cada gnomo teña chaves para algunhas das pechaduras y que calquera tres gnomos conxuntamente teñan chaves para tódalas pechaduras.

Problema 2. Un número positivo x verifica a relación: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

Demostrar que $x^5 + \frac{1}{x^5}$ é un número enteiro y calcular o seu valor.

Problema 3. Sexan tres esferas de radio R tanxentes exteriores entre sí, cada una tanxente ás outras dúas. Considerar de los esferas de radio r, tanxentes exteriores entre sí, de xeito que cada una delas sexa también tanxente exterior ás tres primeiras.

Atopar a relación existente entre os radios R y r.

XLIV Olimpiada Matemática Española

OMG 2008

Sábado 19 de xaneiro de 2008

Olimpiada Matemática Española RSME

Problema 4.

Que número é máis grande: $999!$ ou 500^{999}? Xustifica a túa resposta.

Problema 5.

Un cuadrilátero convexo ten a propiedade de que cada unha das súas dúas diagonais biseca a súa área. Demostrar que este cuadrilátero é un paralelogramo.

Problema 6.

Considéranse 17 números enteiros positivos tales que ningún deles ten un factor primo maior ca 7. Demostrar que polo menos o producto de dous destes números é un cadrado perfecto.

Y colorín colorado este principio está terminado