PROBLEMAS CUADRÁTICOS

Seminario ESTALMAT 2010

Valladolid, 11 de diciembre de 2010

Francisco Bellot Rosado

franciscobellot@gmail.com

Introducción

- Los problemas cuadráticos que voy a presentar pueden plantearse a alumnos de 2º curso de ESTALMAT, aunque no hayan sido elegidos específicamente para ello. Su procedencia es variada, pero casi todos inciden en el método de completamiento de cuadrado, una técnica que, por lo que he podido apreciar, parece estar olvidada del trabajo regular en el aula. En efecto, el pasado curso, en uno de mis Seminarios de preparación de Olimpiadas, en el que coincidían alumnos desde 3º de E.S.O. hasta 2º de Bachillerato, pregunté cuántas veces habían visto en sus clases deducir la fórmula para resolver la ecuación de 2º grado. La respuesta fue demoledora: ***ninguna.***

Problema 1

Un resultado de Sophie Germain

- **Sea N un entero mayor que 1. Demostrar que $N^4 + 4$ nunca es primo.**
- *En la Olimpiada de Brasil de hace algunos años se propuso la siguiente generalización:*
    - Probar que $4^n + n^4$ nunca es primo

Solución

- Intentemos descomponer en producto $N^4 + 4$. Se tiene
    - $N^4 + 4 = N^4 + 4N^2 - 4N^2 + 4 =$
        - $= (N^4 + 4N^2 + 4) - 4N^2 =$
    - $= (N^2 + 2)^2 - (2N)^2 = (N^2 + 2N + 2)(N^2 - 2N + 2)$
- Está claro que el primer factor es mayor que 1. En cuanto al otro, se tiene $N^2 - 2N + 2 = (N - 1)^2 + 1$, así que también lo es.
- Para la generalización, basta considerar el caso $n = 2k + 1$, entonces
    - $4^n + n^4 = (2^n + n^2 + 2^{k+1} x n)(2^n + n^2 - 2^{k+1} x n)$.
- donde x es el signo de multiplicar.

Problema 2

Un ejemplo procedente de la Olimpiada de Rusia de 1990 para alumnos del nivel 9 (12-13 años de edad) y original del bielorruso Igor Voronovich

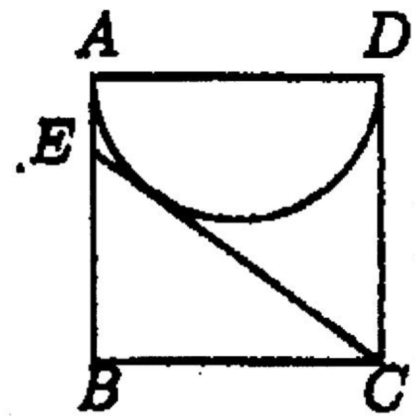
- **Demostrar que para cualquier** *t*, **se verifica**
  - $t^4 - t + (1/2) > 0.$
- *La solución es "de una línea", pero obsérvese la nota final:*
- Se tiene:
  - $t^4 - t + ½ = (t^4 - t^2 + (1/4))(t^2 - t + (1/4)) =$
  - $= (t^2 - ½)^2 + (t - ½)^2 > 0$

La desigualdad es estricta porque los dos sumandos son no negativos y no pueden ser cero simultáneamente.

Problema 3

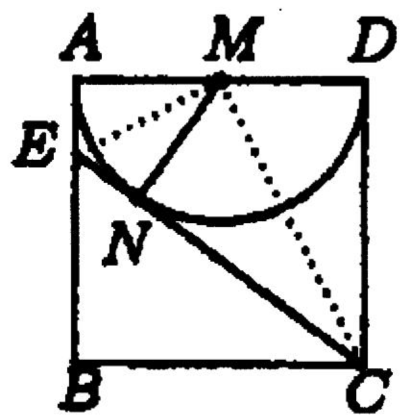
Procede de la Olimpiada de Japón (junior) 2008

- ***ABCD es un cuadrado de lado 1. Una semicircunferencia, de diámetro AD, está contenida en el cuadrado. E es un punto del lado AB de tal forma que CE es tangente a la semicircunferencia. Calcular el área del triángulo CBE.***


A
D
E
B
C

Solución

(*no estrictamente geométrica, que naturalmente la hay)*



- Los triángulos MNC y MDC son iguales, así como también MEA y MEN. Llamando $t = AE$, resulta
  - $EC = 1 + t$, $BE = 1 - t$
- El teorema de Pitágoras en CBE nos da entonces
  - $(1 + t)^2 = 1^2 + (1 - t)^2$, luego $t = 1/4$
- Y por tanto el área buscada es 3/8

El problema 4 es un caso particular, con n = 3, de un problema propuesto hace años en el Torneo Internacional de las Ciudades, un concurso creado en Moscú en 1980 por Nikolai Konstantinov.

- **Sea *a* un número real dado. Calcular los números** x_1 , x_2 , x_3 **que verifican el sistema de ecuaciones**
  - $x_1^2 + ax_1 + (a - 1)^2/4 = x_2$
  - $x_2^2 + ax_2 + (a - 1)^2/4 = x_3$
  - $x_3^2 + ax_3 + (a - 1)^2/4 = x_1$

Solución

- Sumando todas las ecuaciones y reordenando términos escribimos la ecuación resultante como
  - $(x_1 + (a - 1)/2)^2 + (x_2 + (a - 1)/2)^2 + (x_3 + (a - 1)/2)^2 = 0$
    - que da inmediatamente la solución
      - $x_1 = x_2 = x_3 = (1 - a)/2$

- *El ejemplo siguiente procede de un libro que yo considero una obra maestra: "Maxima and minima without Calculus", del canadiense Ivan Niven, publicado por la Mathematical Association of America en 1981. Como se verá, es muy sencillo de ideas, pero tiene consecuencias muy útiles.*
- *Un libro más moderno e igualmente excelente es "Geometric Problems on Maxima and Minima", de T. Andreescu, Oleg Mushkarov y Luchezar Stoyanov, Birkhäuser 2006.*

Problema 5

- **Demostrar que, para cualquier valor de la constante *c*, el máximo valor de** $cx - x^2$
- **es** $c^2/4$, **que se obtiene para** $x = c/2$
  - **Solución y consecuencias**
    - $cx - x^2 = c^2/4 - (x - c/2)^2$
  - Puede observarse que no hay mínimo, basta considerar valores grandes de x.
  - **Consecuencia 1**
- El mínimo valor de $x^2 - cx$ se alcanza si y sólo si
- X = c/2

- **Consecuencia 2**

- Si $x + y = c$, el producto xy es máximo si y sólo si $x = y = c/2$.
- En efecto, como $y = c - x$, se tiene $xy = cx - x^2$ y aplicamos el resultado inicial.

- **Consecuencia 3**

- Si $x > 0$, $y > 0$, y se tiene $xy = c$, entonces la suma $x + y$ es mínima si y sólo si $x = y = c^{1/2}$
- En efecto, $x + c/x = (x^{1/2} - (c/x)^{1/2})^2 + 2c^{1/2}$, luego el mínimo valor de la suma ocurre si el cuadrado vale 0, de donde $x = y = c^{1/2}$

- *He dejado para el final el problema cuadrático más bello que yo conozco. Lo publicó en la revista rumana Gazeta matematica su autor, Mircea Becheanu, durante muchos años Jefe de la Delegación rumana en la I.M.O. y hoy Vicepresidente de la Sociedad de Ciencias Matemáticas de Rumania, que este año 2010 celebra su centenario.*
- *Su nivel de dificultad es, desde luego, superior al nivel de los alumnos de ESTALMAT, pero me parece que merece la pena que sus profesores vean los detalles de la solución.*
-

Problema 6

- **Sean *a* y *b* dos números enteros. Sabiendo que la ecuación**
  - $(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x$
- **admite una raíz entera, resolver (*¡numéricamente!)* la ecuación.**

Solución (del autor, Mircea Becheanu)

- Si $a = b = 0$, la ecuación es de primer grado, con solución única $x = 0$.
- Supongamos que alguno de los números a y b es distinto de cero. La ecuación se escribe en la forma:
  - $(a^2 + b^2)x^2 – (4ab+1)x + a^2 + b^2 = 0$,
- de segundo grado, con raíces x_1,x_2. Supongamos que la raíz entera de que habla el enunciado es x_1 . Puesto que se tiene
  - $(ax_1 – b)^2 + (bx_1 – a)^2 = x_1$
- deducimos que x_1 es, además de entero, positivo. Como las raíces son reales, el discriminante será mayor o igual que cero:

- $(4ab+1)^2 - 4(a^2 + b^2)^2 >= 0$

- y el primer miembro se descompone en producto de dos factores:
- Uno de ellos es $1 – 2(a – b)^2$; el otro, $1 + 2(a – b)^2$
- Entonces el primero de esos factores tiene que ser positivo, lo cual lleva a que $a - b = 0$.
- Con esto, la ecuación inicial se convierte en
  - $2.a^2x^2 – (4.a^2 + 1)x + 2.a^2 = 0$
- Aplicando ahora las fórmulas de Cardano- Vieta tenemos:

- $x_1 + x_2 = 2 + 1/(2.a^2)$; $x_1.x_2 = 1$
- Obsérvese que, al ser x_1 natural, no puede ser $x_1 = 0$ ni tampoco $x_1=1$. Por lo tanto x_1 tiene que ser mayor o igual que 2. Puesto que $x_2 = 1/x_1 > 0$, será
  - $2=< x_1 < x_1 + x_2 = 2 + 1/(2.a^2) < 3$
- y al ser x_1 entero ha de ser $x_1 =2$, $x_2 = ½$. Sustituyendo los valores obtenemos $a^2 = 1$, con lo cual
  - **a = b = +1 ó – 1; con raíces 2 y 1/2**

Otros enunciados interesantes

- Si tuviéramos tiempo, podríamos discutir estos tres problemas:

- **Problema 7**
- **Las longitudes de los lados de un triángulo son 6, 8, 10. Demostrar que hay una recta r (y solamente una) que divide en dos partes iguales al área y al perímetro del triángulo.**
- *Origen del problema: Olimpiada del Canadá 1985.*
-

- **Problema 8**
- **Las ecuaciones $x^2 + ax + 1 = 0$ y $x^2 + bx + c = 0$ tienen una raíz real común. Otro tanto les ocurre a las ecuaciones**
- **$x^2 + x + a = 0$ y $x^2 + cx + b = 0$.**
- **Calcular el valor de $a + b + c$.**
- *Origen del problema: Olimpiada de Rusia, 2000.*

- **Problema 9**
- **Hallar los números reales y positivos x, y, sabiendo que las cuatro medias (aritmética, geométrica, armónica y raíz media cuadrática)**
- **son números naturales cuya suma vale 66.**
- *Origen del problema: Olimpiada de la República Checa y de Eslovaquia, 1995, ronda final.*

- **Y un comentario bibliográfico final:**
-
- *En el volumen de noviembre-diciembre de 1998 de la lamentablemente desaparecida revista* ***Quantum*** *(la versión en inglés de la rusa* ***Kvant****) se incluye un interesante artículo de Mark Saul y Titu Andreescu titulado* ***Completing the square****, donde aparecen 8 problemas de este tipo, convenientemente resueltos y analizados.*

- **¡Muchas gracias por vuestra atención!**