TEORIA DE NUMEROS (II)

Las siguientes proposiciones son útiles para resolver problemas sobre teoría de números.

PROPOSICION 1. Algoritmo de la división entera

Si $a \neq 0$ y $b > 0$ son dos enteros dados, entonces existen otros dos enteros q y r (únicos) que satisfacen:

$$a = b \times q + r \qquad q \geq 0 \qquad 0 \leq r < b$$

Los enteros q y r se llaman, respectivamente, cociente y resto de la división entera de "a" entre "b"

EJEMPLO 1

Utilizando el algoritmo de la división entera, prueba que todo entero n se puede escribir de la forma: $\boxed{2k+r}$, siendo r=0,1

SOLUCION: Dividimos n entre dos Hay dos casos:

a) que n sea par: $\begin{array}{l|l} n & 2 \\ \hline 0 & k \end{array}$ y por tanto n=2k+0 , es decir $\boxed{n = 2k}$

b) que n sea impar: $\begin{array}{l|l} n & 2 \\ \hline 1 & k \end{array}$ y por tanto $\boxed{n = 2k+1}$

EJERCICIOS

1) Probar que todo entero se puede escribir de la forma $\boxed{3k+r}$, siendo r=0,1,2. ¿Se puede generalizar?

2) Un variación del resultado anterior es: Probar que todo entero se puede escribir de la forma $\boxed{3k+r}$, siendo r=0,1,-1

3) Usando el resultado anterior prueba que el cuadrado de todo entero es de la forma: 3k o 3k+1

4) Demostrar que dados tres números enteros consecutivos exactamente uno de ellos es múltiplo de 3?

5) ¿Hay un resultado similar para cuatro números consecutivos? ¿Se puede generalizar?

6) Probar que el producto de 3 números consecutivos es siempre un múltiplo de 6?

7) Probar que n^5-$5n^3$+4n es siempre divisible por 120

8) Probar que el cuadrado de cualquier entero es de la forma 4k o 4k+1

9) Probar que si 3 divide a a^2+b^2 entonces 3 divide a "a" y 3 divide a "b"

10) Probar que el cuadrado de cualquier entero impar deja resto 1 cuando lo dividimos por 8

11) Probar que 3 nunca puede dividir a n^2+1

MULTIPLOS Y DIVISORES

DEfiNICIÓN

Si "a" y "b" son enteros y **a = qb** para algún entero q, diremos que "b" ***divide*** a "a", que "b" es un ***divisor (o factor)*** de "a", o que "a" es ***múltiplo*** de "b".

NOTACION: Se escribe

$$b \mid a \iff b \text{ divide a } a$$

$$b \nmid a \iff b \text{ no divide a } a$$

$$a = \dot{b} \iff a \text{ es múltiplo de } b$$

PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD

$$\text{I) } a \mid b \quad \text{y} \quad b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

$$\text{II) } a \mid b \quad \text{y} \quad c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$$

$$\text{III) } m \neq 0 \Rightarrow a \mid b \quad \text{si, y solo si,} \quad m.a \mid m.b$$

$$\text{IV) Si } a \text{ divide a } b \text{ y } c \Rightarrow a \mid m.b + n.c \text{ para todo par de enteros } m \text{ y } n$$

$$\text{V) } a \mid b \quad \text{y} \quad b \mid a \quad \text{si, y solo si, } a = \pm b$$

EJEMPLO 2

Para cierto "n" los números 5n+16 y 8n+29 tienen un divisor común mayor que 1¿Cuál es ese divisor?

SOLUCION:

Si d es un divisor comun de 5n+16 y 8n+29 , entonces también es divisor del numero : 5.(8n+29) - 8.(5n+16) = 40n+145-40n-128=17 . Y como es primo es el único divisor mayor que 1.

12) Hallar los valores *"n"* para los que $\frac{5n+26}{2n+3}$ es un entero.

13) Existe algun entero *"n"* para el que 15 divida a (3n+77)

14) ¿Para cuantos enteros *"n"* ($100 \leq n \leq 200$) la fracción $\frac{n^2-3}{n^2-1}$ es reducible?

MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN MULTIPLO

PROPOSICION 2 .- Números primos entre si (COPRIMOS)

Dos números enteros "a" y "b" son primos entre si si y sólo si los unicos divisores comunes de "a" y "b" son +1 y -1. Es decir si M.C.D.(a,b)=1

PROPOSICION 3

Si "a" y "b" son enteros cualesquiera, entonces;

$$\boxed{M.C.D.(a,b) = M.C.D.(b, a-b)}$$

PROPOSICION 4

Si a y b son dos enteros cualesquiera, entonces:

$$\boxed{M.C.D.(a,b) \times M.C.M(a,b) = a \times b}$$

EJEMPLO 3

Demuestra que si k es un entero cualquiera, entonces los enteros 3k+2 y 5k+3 son primos entre si

SOLUCION:

$$M.C.D.(3k+2, 5k+3) = M.C.D.(5k+3,\ (5k+3)-(3k+2)\ ) = M.C.D.(3k+2, 2k+1) =$$

$$M.C.D.(2k+1, k+1) = M.C.D.(k+1, k) = M.C.D.(k,1) = 1$$

15) ¿Existen pares de numeros enteros (x,y) que sean solucion de la ecuacion: 60x+18y=97 ?

PROPOSICION 5 (LEMA de GAUSS)

Si "a" y "b" y "c" son enteros tales que a| b.c siendo a y b son primos entre si, entonces a | c .

PROPOSICION 6

Si un primo divide un producto de enteros, entonces el primo debe dividir algún factor. Concretamente, si p es un primo y a y b son enteros tales que p | a.b, entonces p | a o p | b .

PROPOSICION 7

Todo entero compuesto n tiene un factor primo menor o igual que $\sqrt{n}$

EJERCICIOS

15) El numero $17^9 – 9^9$ es divisible por 2^k ¿Cual es el mayor valor de k?

16) Si a y b son dos enteros para los que $a^2 – b^2 = 2003$ ¿Cuánto vale $a^2 + b^2$?
(Indicación: 2003 es un número primo)

17) ¿Para cuantos enteros *"n"* con $10 \le n \le 100$, es $n^2 + n - 90$ divisible por 17?

18) p y q son dos enteros positivos con pxq=40000. Además ni p ni q son divisibles por 10 ¿Cuanto vale p+q?

19) ¿Cuantos enteros positivos *"n"* dejan resto 6 cuando 2006 es dividido por n?

20) ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide al número $2^{2008} + 10^{2008}$?

APLICA LO QUE HAS APRENDIDO

21) ¿Cuantos cuadrados perfectos menores que 10^6 son múltiplos de 24?

22) ¿Calcular el menor entero *"n"* para el que 13.19.n se puede poner como producto de 3 numeros consecutivos?

23) En una clase de 30 estudiantes el profesor escribe en la pizarra un entero positivo. Un estudiante dice que es divisible por 2, otro que es divisible por 3, y otro por 4, y así hasta que el estudiante número 30 dice que es divisible por 31. El profesor dice entonces que todas las afirmaciones que se han hecho son verdaderas, salvo dos de éllas, que además se han hecho seguidas. ¿Cuales son las dos afirmaciones falsas?

24) Probar que si p es un número primo, $p \ge 5$, entonces 24 divide a $p^2 - 1$.

25) ¿Cuantos enteros diferentes se pueden escribir mediante la suma de tres numeros distintos extraidos del conjunto { 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19} ?

26) ¿Para cuantos enteros "n" es $\frac{n}{20-n}$ un cuadrado perfecto?

27) La suma de 18 enteros positivo consecutivos es un cuadrado perfecto. ¿ Calcular el menor valor posible de su suma?

28) Probar que para todo entero positivo "n" $n^{13} - n^7$ es divisible por 6

29) Demostrar que el número 2011 no se puede poner como suma de dos cuadrados. (IND: Usar el resultado del problema 8)