PRINCIPIO DEL PALOMAR

Imaginémonos apaciblemente sentados en un banco del parque. A nuestro alrededor picotean por el suelo un montón de palomas. Las cuentas… son 21. De repente suena un petardazo que las asusta. Se van todas volando al palomar que se encuentra enfrente y se esconden en los agujeros del palomar. Las cuentas… son 20. ¿Qué podemos deducir? No hace falta ser un lince para concluir que *al menos dos de las palomas se han metido en un mismo agujero*. Pero ahora, podemos preguntarnos, ¿qué tienen que ver los siguientes problemas con las palomas?

1.- Una bolsa contiene canicas de dos colores: negras y blancas. ¿Cuál es el menor número de canicas que pueden ser retiradas de la bolsa, sin mirar, de manera que entre estas canicas haya dos del mismo color?

2.- Un millón de pinos crecen en un bosque. Se sabe que ningún pino tiene más de 600.000 hojas. Probar que en este bosque existen al menos dos pinos con el mismo número de hojas.

3.- Dados 12 números enteros cualesquiera, probar que dos de ellos pueden escogerse de forma que su diferencia sea divisible por 11.

4.- La ciudad de Madrid tiene cinco millones de habitantes. Probar que dos de ellos tienen el mismo número de pelos en la cabeza, si se sabe que una persona no puede tener más de un millón de pelos en su cabeza.

5.- Veinticinco cajas de manzanas son entregadas a un almacén. Las manzanas son de tres clases diferentes, y todas las manzanas en cada caja son del mismo tipo. Probar que entre estas cajas hay al menos nueve con el mismo tipo de manzanas.

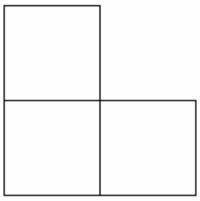
6.- En la liga de fútbol escolar de Ponferrada hay M equipos cada uno con once jugadores. Todos se reúnen en la estación de autobuses para viajar a León, donde van a participar en un campeonato provincial. Hay sólo diez autobuses disponibles y cada uno tiene M plazas. A un jugador lo lleva su padre en automóvil, ya que éste tiene que ir a León por razones de trabajo. Probar que al menos un equipo completo llegará al campeonato

7.- Dados 8 números naturales diferentes (excluido el cero), no mayores de 15, probar que al menos tres pares de ellos tienen la misma diferencia positiva (los pares no necesariamente disjuntos como conjuntos).

8.- Probar que en cualquier grupo de cinco personas, hay dos que tienen el mismo número de amigos dentro del grupo.

9.- Varios equipos de fútbol participan en un torneo en el cual cada equipo juega con otro una sola vez. Probar que en cualquier momento del campeonato habrá dos equipos que hayan jugado el mismo número de partidos.

10.- a) Cuál es el mayor número de cuadritos en un tablero de ajedrez (8×8) que pueden ser coloreados en verde, de forma que cualquier grupo de tres cuadritos como el de la figura tenga al menos un cuadrito no coloreado de verde (la figura puede aparecer también en posiciones que se obtengan al girarla múltiplos de 90º, y se denomina *triminó*).



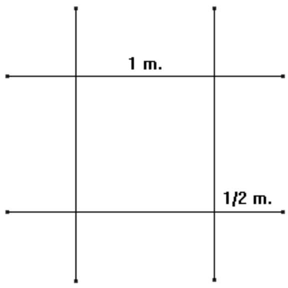
AYUDA: Divide el tablero en 16 cuadrados 2×2. Estos cuadrados son los agujeros del palomar, y los cuadritos verdes serán las palomas.

b) Cuál es el menor número de cuadritos de un tablero de ajedrez que se pueden colorear en verde, de forma que cualquier triminó tenga al menos un cuadrito en color verde.

11.- Cuál es el mayor número de reyes que pueden ser colocados en un tablero de ajedrez de manera que ninguno dé jaque a ningún otro.

12.- Diez estudiantes intentaron resolver un total de 35 problemas en una olimpiada matemática. Cada problema fue resuelto por un estudiante únicamente. Hay al menos un estudiante que resuelve solamente un problema, al menos uno que resuelve sólo dos problemas, y al menos uno que resuelve exactamente tres problemas. Probar que hay, también, al menos un estudiante que ha resuelto al menos cinco problemas.

13.- ¿Cuál es el mayor número de arañas que pueden amigablemente compartir la tela de araña dibujada a continuación? Una araña tolera a otra sólo a una distancia mayor de 1 metro moviéndose a lo largo de la tela.



14.- Probar que un triángulo equilátero no puede ser cubierto completamente por dos triángulos equiláteros más pequeños.

15.- Tenemos 51 puntos diseminados dentro de un cuadrado de un metro de lado. Probar que, sea cual sea la posición de dichos puntos, algún conjunto de tres de ellos puede ser cubierto por un cuadrado de lado 20 cm.

16.- Cinco jóvenes han recibido un sueldo conjunto de 1500 €. Cada uno de ellos quiere comprar un equipo de música que vale 320 €. Probar que al menos uno de ellos debe esperar a la próxima paga para poder efectuar su compra.

17.- En una reunión hay siete personas cuya suma de edades es 332 años. Probar que se pueden elegir tres miembros de modo que la suma de sus edades no sea inferior a 142 años.

18.- En un planeta llamado Ω (omega), más de la mitad de la superficie es tierra firme. Probar que en Ω se podría excavar un túnel recto a través del centro del planeta, comenzando y finalizando en tierra firme.

19.- Probar que existen dos potencias de dos que difieren en un múltiplo de 2006.

20.- Probar que, dados 52 números enteros cualesquiera, siempre se pueden encontrar dos de ellos cuyos cuadrados difieran en un múltiplo de 100.

21.- Probar que existe un número entero cuya expresión decimal está constituida exclusivamente por *unos* y que es divisible por 2007.

22.- Probar que existe una potencia de tres cuyas tres últimas cifras de su representación decimal son 001.

23.- En cada casilla de un cuadro de 3×3 casillas se coloca un 0, un 1 ó un -1. Probar que entre las ocho posibles sumas que se pueden efectuar a lo largo de las filas, de las columnas y de las diagonales, al menos dos, deben coincidir.

24.- De 100 personas sentadas alrededor de una mesa redonda, más de la mitad son hombres. Probar que hay dos hombres sentados diametralmente opuestos uno del otro.

25.- Quince chicos tienen cien nueces entre todos. Probar que, en alguna pareja, ambos tienen el mismo número de nueces.

26.- Las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se dividen en tres grupos. Probar que el producto de los números en uno de dichos grupos, sean cual sean estos, siempre debe ser mayor de 71.

27.- Situamos un número entero en cada casilla de una cuadrícula 10×10, de manera que dos enteros situados en casillas contiguas (con un lado común) no tengan diferencia superior a cinco. Probar que dos de estos enteros han de ser iguales.

28.- Probar que entre seis personas hay un grupo de tres que o bien se conocen todas entre sí o bien no se conocen ninguna entre sí.

29.- Se escogen cinco puntos cualesquiera de una rejilla cuadrada. Probar que el punto medio de uno de los segmentos que unen dos de estos puntos es también un punto de la rejilla.

30.- Un almacén tiene 200 botas del número 41, 200 botas del 42, y 200 más del 43. De estas 600 botas, hay 300 del pie derecho y otras 300 del pie izquierdo. Probar que uno puede encontrar entre estas botas al menos 100 pares útiles.

31.- El alfabeto de cierto idioma contiene 22 consonantes y 11 vocales. Cada ristra de letras es una palabra en este idioma, con tal de que no haya dos consonantes juntas y ninguna letra aparezca dos veces. El alfabeto se divide en seis subconjuntos cualesquiera (no vacíos). Probar que las letras de al menos uno de estos grupos forman una palabra en este idioma.

32.- Probar que siempre se puede elegir un subconjunto de un conjunto de 10 números enteros cualesquiera, de modo que su suma sea múltiplo de 10.

33.- Dados once números naturales diferentes cualesquiera (excluido el cero), no mayores de veinte. Probar que siempre pueden elegirse dos de ellos de manera que uno divida al otro.

34.- Once estudiantes han formado cinco grupos de trabajo en un campamento de verano. Probar que dos estudiantes pueden afirmar, digamos A y B, que cada grupo de trabajo que incluye a A también lo hace con B.